关于偶数 p-级数的求和显式*

蔡俊亮
(北京师范大学数学科学学院,教育部数学与复杂系统重点实验室,100875,北京)

摘要 在无穷级数理论中,p-级数是一个非常重要的数项级数.关于 p-级数的收敛性问题早已解决,而其求和问题一直受到人们的关注.近年来,人们试图先解决偶数 p-级数的求和问题,虽有进展,但并非理想.本文最终解决了这个问题,获得了偶数 p-级数的一个求和显式,并给出了其交错级数的一个求和显式.

关键词 p-级数;求和;递归式;显式

0 引言

众所周知,无穷级数理论是微积分学的重要组成部分,它在组合数学、近似计算等领域也起着重要的作用.在无穷级数理论中的两大基本问题是级数审敛与级数求和问题.

无穷级数理论中有3个非常重要的参考级数:几何级数、调和级数和 p-级数,它们的审敛问题已全部解决.关于级数求和问题,几何级数已解决;调和级数作为 p-级数特例是发散级数;而 p-级数($p>1$)的求和问题一直受到人们的关注[1-4],但至今仍未全部解决.

近年来,人们试图先解决比较简单的偶数 p-级数的求和问题,虽有进展,但并非理想.为方便计,我们将 p-级数及其交错级数分别统一记为

$$\sigma(p)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^p}\ (p>1);$$

$$\tau(p)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\ (p\geqslant 1). \tag{1}$$

由于这2个级数在理论上和实际中的广泛应用,吸引了许多数学工作者对此问题的研究兴趣.但到目前为止仅得到几个特殊的结果:

$$\sigma(2)=\frac{\pi^2}{6},\ \sigma(4)=\frac{\pi^4}{90},\ \sigma(6)=\frac{\pi^6}{945} \tag{2}$$

和

$$\tau(1)=\ln 2,\ \tau(2)=\frac{\pi^2}{12},$$

$$\tau(4)=\frac{7\pi^4}{720},\ \tau(6)=\frac{31\pi^6}{30\,240} \tag{3}$$

等.

2005年6月,文献[5]利用闭路积分法和留数法导出了计算 $\sigma(2k)$ 值一个递推公式(见文献[5]中的式(12)),即

$$\sigma(2k)=\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i-1}\pi^{2i}\frac{2^{2k-1}-2^{2i}}{(2i)!(2^{2k}-1)}\sigma(2k-2i)+\frac{(-1)^{k-1}\pi^{2k}2^{2k-3}}{k(2k-1)!(2^{2k}-1)}. \tag{4}$$

2005年12月,文献[6]利用傅里叶级数展开的方法导出了计算 $\sigma(2k)$ 值又一个递推公式(见文献[6]中的式(13)),即

$$\sigma(2k)=\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i-1}\frac{\pi^{2i}}{(2i+1)!}\sigma(2k-2i)+(-1)^{k-1}\frac{\pi^{2k}k}{(2k+1)!}. \tag{5}$$

同时,还得到 $\tau(2k)$ 的一个递推公式(见文献[6]中的式(16)),即

$$\tau(2k)=\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1}\frac{\pi^{2i}}{(2i+1)!}\tau(2k-2i)+(-1)^{k-1}\frac{\pi^{2k}}{2(2k+1)!}. \tag{6}$$

当然,我们可以利用上面的这些递推公式依次计算 $\sigma(2k)$ 和 $\tau(2k)$($k=1,2,\cdots$)的值,但由于这种递推计算的难度很大,就是用计算机计算也很费时.因此,能否导出计算 $\sigma(2k)$ 或 $\tau(2k)$ 的一个简单显式,是目前我们急需解决的一个问题.

本文在以上结果的基础上,利用组合数学的方法解决了这个问题,从而获得了偶数 p-级数的一个求和显式,并给出了其交错级数的一个求和显式.

1 预备知识

为了利用排列组合的方法获得本文的结果,我们需要引入下面的一些概念,记号和结论.

设 $(j_1j_2\cdots j_l)$ 为 l 个正整数 $j_1,j_2,\cdots,j_l$ 的一个排列,则当 $j_1+j_2+\cdots+j_l=k$ 时,称排列 $(j_1j_2\cdots j_l)$ 为一个 l 元的 k-级排列,记为 $(j_1j_2\cdots j_l)_k$.即

$$(j_1j_2\cdots j_l)_k=(j_1j_2\cdots j_l)\big|_{j_1+j_2+\cdots+j_l=k},$$

其中 $1\leqslant l\leqslant k$.对于任意正整数 k,记 l-元的 k-级排列

收稿日期:2013-05-24

的集合为 $\mathcal{J}_k(l)$，k-级排列的集合为

$$\mathcal{J}_k=\mathcal{J}_k(1)\cup\mathcal{J}_k(2)\cup\cdots\cup\mathcal{J}_k(k). \tag{7}$$

例如，$\mathcal{J}_1=\mathcal{J}_1(1)=\{(1)\}$，$\mathcal{J}_2=\mathcal{J}_2(1)\cup\mathcal{J}_2(2)=\{(2)\}\cup\{(11)\}=\{(2),(11)\}$.

$\mathcal{J}_3=\mathcal{J}_3(1)\cup\mathcal{J}_3(2)\cup\mathcal{J}_3(3)=\{(3)\}\cup\{(12),(21)\}\cup\{(111)\}=\{(3),(12),(21),(111)\}$.

由此可见，$|\mathcal{J}_k(l)|=C_{k-1}^{l-1}$(组合数)，即

$$|\mathcal{J}_k|=|\mathcal{J}_k(1)|+|\mathcal{J}_k(2)|+\cdots+|\mathcal{J}_k(k)|=2^{k-1}. \tag{8}$$

定义 1 对于任意非零实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$，定义实数：

$$M_0=1,\quad M_k=\sum_{(j_1j_2\cdots j_l)_k}\prod_{i=1}^{l}\lambda_{j_i}=\sum_{(j_1j_2\cdots j_l)_k}\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\cdots\lambda_{j_l}\ (k\geqslant 1). \tag{9}$$

其中和式是对所有的 $k(\geqslant 1)$-级排列 $(j_1j_2\cdots j_l)_k$ 而取. 由此可得下面的结论：

引理 1 对于正整数 k，若 $C_k=\sum_{i=1}^{k}\lambda_iC_{k-i}$，则 $C_k=C_0M_k$，其中 λ_i 和 M_k 如式(9)定义.

证明 归纳法：根据式(10)可知：$M_1=\lambda_1$，即 $C_1=\lambda_1C_0=C_0M_1$ 显然成立.

设 $C_2=C_0M_2$，$C_3=C_0M_3$，$\cdots$，$C_k=C_0M_k$ 均成立，则

$$C_{k+1}=\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_iC_{k+1-i}=C_0\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_iM_{k-i+1}.$$

因为

$$\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_iM_{k-i+1}=\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i\sum_{(j_1j_2\cdots j_l)_{k-i}}\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\cdots\lambda_{j_l}=\sum_{i=1}^{k+1}\sum_{(ij_1j_2\cdots j_l)_{k-1}}\lambda_i\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\cdots\lambda_{j_l}=\sum_{(j_0j_1j_2\cdots j_l)_{k-1}}\lambda_{j_0}\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\cdots\lambda_{j_l}=M_{k+1},$$

即 $C_{k+1}=C_0M_{k+1}$ 成立. 根据归纳法可知，结论成立.

引理 2 设 $\tau(2k)=\pi^{2k}B_k$，则

$$B_k=\sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^{i-1}}{(2i+1)!}B_{k-i},\ B_0=\frac{1}{2}. \tag{10}$$

证明 在式(6)中给定初值 $\tau(0)=\frac{1}{2}$，则式(6)可简化为

$$\tau(2k)=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\frac{\pi^{2i}}{(2i+1)!}\tau(2k-2i),$$

将 $\tau(2k)=\pi^{2k}B_k$ 代入上式，约去 π^{2k} 即可得到式(10).

引理 3 设 $\sigma(2k)=\pi^{2k}A_k$，则

$$A_k=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\frac{2^{2k-1}-2^{2i}}{(2i)!(2^{2k}-1)}A_{k-i},\qquad A_0=-\frac{1}{2}. \tag{11}$$

证明 在式(4)中给定初值 $\sigma(0)=-\frac{1}{2}$，则式(4)可简化为

$$\sigma(2k)=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\frac{2^{2k-1}-2^{2i}}{(2i)!(2^{2k}-1)}\pi^{2i}\sigma(2k-2i),$$

将 $\sigma(2k)=\pi^{2k}A_k$ 代入上式，约去 π^{2k} 即可得到式(11).

引理 4 级数 $\tau(p)$ 和 $\sigma(p)$ 之间有如下关系：

$$\sigma(p)=\frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1}\tau(p)\quad(p>1). \tag{12}$$

证明 由于级数 $\tau(p)$ 和 $\sigma(p)$ 均为绝对收敛级数，所以

$$\sigma(p)-\tau(p)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2i)^p}=\frac{1}{2^{p-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\frac{1}{2^{p-1}}\sigma(p).$$

上式整理后，即可得到式(12).

2 主要结论

有了以上的预备知识和结论，我们就很容易得到本文的结论.

定理 1 交错偶数 $p=2k$-级数的求和显式为

$$\tau(2k)=\frac{1}{2}M_k\pi^{2k},$$

其中 M_k 由式(9)确定，$\lambda_i=(-1)^{i-1}[(2i+1)!]^{-1}$，即

$$\tau(2k)=\frac{\pi^{2k}}{2}\sum_{(j_1j_2\cdots j_l)_k}(-1)^{k-l}\prod_{i=1}^{l}[(2j_i+1)!]^{-1}, \tag{13}$$

其中和式是对所有 $k(\geqslant 1)$-级排列 $(j_1j_2\cdots j_l)_k$ 而取.

证明 由引理2可知：$B_k=\sum_{i=1}^{k}\lambda_iB_{k-i}$. 从而根据引理1及式(9)，可得

$$B_k=B_0M_k=\frac{1}{2}\sum_{(j_1j_2\cdots j_l)_k}\prod_{i=1}^{l}\lambda_{j_i}=\frac{1}{2}\sum_{(j_1j_2\cdots j_l)_k}\prod_{i=1}^{l}\frac{(-1)^{j_i-1}}{(2j_i+1)!}=\frac{1}{2}\sum_{(j_1j_2\cdots j_l)_k}(-1)^{(j_1+1)+(j_2-1)+\cdots+(j_l+1)}\prod_{i=1}^{l}[(2j_i+1)!]^{-1}=\frac{1}{2}\sum_{(j_1j_2\cdots j_l)_k}(-1)^{k+l}\prod_{i=1}^{l}[(2j_i+1)!]^{-1}.$$

再将上式代入 $\tau(2k)=\pi^{2k}B_k$，即得欲证.

定理 2 偶数 $p=2k$-级数的求和显式为

$$\sigma(2k)=\frac{2^{2k-1}}{4^k-2}M_k\pi^{2k},$$

其中 M_k 由式(9)确定，$\lambda_i=(-1)^{i-1}[(2i+1)!]^{-1}$，即

$$\sigma(2k)=\frac{2^{2k-1}\pi^{2k}}{4^k-2}\sum_{(j_1j_2\cdots j_l)_k}(-1)^{k+l}\prod_{i=1}^{l}[(2j_i+1)!]^{-1}, \tag{14}$$

其中和式是对所有 $k(\geqslant 1)$-级排列 $(j_1 j_2 \cdots j_l)_k$ 而取.

证明　将式(13)代入式(12)，整理即得结论.

定理 3　偶数 $p=2k$-级数的求和显式为

$$\sigma(2k) = -\frac{1}{2}M_k \pi^{2k},$$

其中 M_k 由式(9)确定，

$$\lambda_i = (-1)^{i-1}[2^{2k-1}-2^{2i}] \cdot [(2i)!\ (2^{2k}-1)]^{-1},$$

即

$$\sigma(2k) = \frac{1}{2}\pi^{2k} \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_l)_k} \frac{(-1)^{k+l-1}}{(2^{2k}-1)^l} \prod_{i=1}^{l} \frac{2^{2k-1}-2^{2j_i}}{(2j_i)!}, \tag{15}$$

其中和式是对所有 $k(\geqslant 1)$-级排列 $(j_1 j_2 \cdots j_l)_k$ 而取.

证明　由引理 3 可知：$A_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_{k-i}$. 从而根据引理 1 及式(9)，可得

$$A_k = A\ M_k = \frac{1}{2} \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_l)_k} \frac{(-1)^{k+l-1}}{(2^{2k}-1)^l} \prod_{i=1}^{l} \frac{2^{2k-1}-2^{2j_i}}{(2j_i)!}.$$

再将上式代入 $\sigma(2k)=\pi^{2k}A_k$，即得欲证.

显然，利用上面的几个定理，我们可以很方便的求出式(2)和(3)给出的结果. 下面我们利用定理 1 和定理 2 分别计算 $\tau(8)$ 和 $\sigma(8)$.

因为 $r_4 = \{(4),(13),(22),(31),(112),(121),(211),(1111)\}$，所以

$$M_4 = \lambda_4 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_3 - 3\lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1^4 =$$
$$-\frac{1}{9!} - \frac{1}{5!\ 5!} + \frac{1}{7!\ 3} - \frac{1}{5!\ 223} + \frac{1}{6\,666} = \frac{127}{8!\ 15}.$$

于是

$$\tau(8) = \frac{127}{8!30}\pi^8 = \frac{127\pi^8}{1\,206\,900};\ \sigma(8) = \frac{\pi^8}{9450}. \tag{16}$$

类似地，可分别计算 $\tau(10)$ 和 $\sigma(10)$：

$$M_5 = \lambda_5 + 2\lambda_1\lambda_4 + 2\lambda_2\lambda_3 + 3\lambda_1^2\lambda_3 + 3\lambda_1\lambda_2^2 - 4\lambda_1^3\lambda_2 - \lambda_1^5 =$$
$$\frac{1}{11!} - \frac{2}{9!\ 6} - \frac{2}{5!\ 7!} + \frac{3}{7!\ 66} + \frac{3}{5!\ 5!\ 6} -$$
$$\frac{4}{5!\ 666} + \frac{1}{66\,666} = \frac{511}{9!\ 66}.$$

所以

$$\tau(10) = \frac{511\pi^{10}}{9!132} = \frac{73\pi^{10}}{6\,842\,880};\ \sigma(10) = \frac{\pi^{10}}{93\,555}. \tag{17}$$

3　参考文献

[1] 华罗庚. 高等数学引论[M]. 北京：高等教育出版社，2010

[2] 同济大学数学教研室. 高等数学[M]. 5 版. 北京：高等教育出版社，2005

[3] 邝荣雨. 微积分学讲义[M]. 北京：北京师范大学出版社，2006

[4] 蔡俊亮. 高等数学 B[M]. 北京：北京师范大学出版社，2009

[5] 王琼. 关于无穷级数等式 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ 的证明[J]. 数学通报，2002(8)：11

[6] 刘凤林. p-级数的两个求和公式[J]. 天津科技大学学报，2005(1)：65

TWO EXPLICIT SUMMATIONS OF EVEN p-SERIES

CAI　Junliang

(Laboratory of Mathematics and Complex Systems, School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, 100875, Beijing, China)

Abstract　p-series is important in the theory of infinite series. The convergence of p-series is solved, but the sum has drawn some attention. Attemps to solve the even p-series summation problem have been made in recent years, with limited progress. This problem is completely solved in that an even p-series summation was obtained, and summation of its alternating series given explicitly.

Key words　p-series; summation; explicit; recursion