试论“必须设对照试验的优选法”

陈 木 法

（数学系研究生）

文[1]提出了在实际中很有意义的优选问题，并就每批个数相同的情况给出了最优方法。在这篇短文里，我们证明：在每批个数任意的情况下，这类优选问题都可以变换成普通意义下的优选问题。因而，已有的单因素优选问题的全部结果都可以直接移植到这类优选问题上来。这就彻底地解决了这一类优选问题。

§1 方 法 介 绍

§1.1，限定 n 批情况

我们先回忆熟知的普通意义下（即不设对照点）限定 n 批的最优方法。由此稍加修改，便可得到必须设对照试验情况下的最优方法。

假设试验的初始区间是〔0,1〕。各批试验点的个数顺序为 $k_1, k_2, \cdots\cdots k_n$。先利用如下递推公式算出诸 x_i 和 y_i $(0\leqslant i\leqslant n)$：

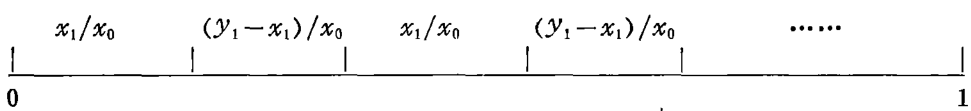
$$x_n=1, \qquad y_n=2,$$

$$\left.\begin{aligned} x_i&=\varkappa(k_i+1)+\left[\frac{k_{i+1}+1}{2}\right]y_{i+1}\\ y_i&=\varkappa(k_{i+1}+1)+\left[\frac{k_{i+2}+2}{2}\right]y_{i+1}\end{aligned}\right\} \quad (0\leqslant i\leqslant n-1)$$

于此，$[x]$表示不超过 x 的最大整数，而

$$\varkappa(k)=\begin{cases}1\text{，当 } k \text{ 为偶数时，}\\ 0\text{，当 } k \text{ 为奇数时。}\end{cases}$$

其次，利用 x_i, y_i $(0\leqslant i\leqslant n)$ 安排各批试验点。在第一批把区间〔0,1〕分成长为 x_1/x_0，短为 $(y_1-x_1)/x_0$。而且长短相间的 k_1+1 段，即



并在 k_1 分点上安排第一批试验，将试验点顺序编号为：

$$(0<)\ \alpha_{1,1}<\alpha_{1,2}<\cdots\cdots<\alpha_{1,k_1}\ (<1)$$

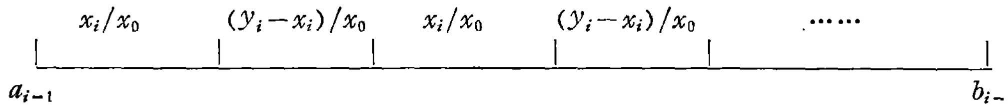
此时必定存在 j，使

$$f(\alpha_{1,1})<\cdots\cdots<f(\alpha_{1,j-1})<f(\alpha_{1,j})>f(\alpha_{1,j+1})>\cdots\cdots f(\alpha_{1,k_1})$$

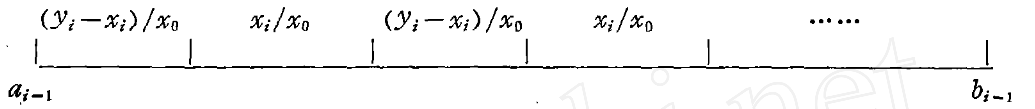
或：

$$f(\alpha_{1,1})<\cdots\cdots<f(\alpha_{1,j-1})<f(\alpha_{1,j})=f(\alpha_{1,j+1})>f(\alpha_{1,j+2})>\cdots\cdots>f(\alpha_{1,k_1})$$

因而总可消去区间$[\alpha_{1,j-1},\ \alpha_{1,j+1}]$以外的各段。我们用$[a_1,(c_1),b_1]$表示留下区间，称之为第一批剩余区间，其中$c_1$是第一批试验的"好点"。在第$i$（$2\leqslant i\leqslant n$）批，将第$i-1$批剩余区间$[a_{i-1},(c_{i-1}),b_{i-1}]$分成长为$x_i/x_0$，短为$(y_i-x_i)/x_0$，且长短相间的$k_i+2$段，即



或



二者必居其一，且其中有一个分点是c_{i-1}。除c_{i-1}外还有k_i个分点，我们把这k_i个分点取作第i批试验点。

我们把上面所构造的试验方法记作$\mathscr{F}_n$。它是通常意义下$(k_1,k_2\cdots\cdots k_n)$序贯优选法。按照同样的构造规则，我们可以立即得到$(k_1,k_2+1\cdots\cdots k_n+1)$序贯的"必须设对照试验的优选法"$\widetilde{\mathscr{F}}_n$：它的第一批试验点就取为$\mathscr{F}_n$的第一批试验点；在第$i$（$2\leqslant i\leqslant n$）批，也是将第$i-1$批剩余区间分成长为$x_i/x_0$，短为$(y_i-x_i)/x_0$且长短相间的$k_i+2$段并在$k_i+1$个分点上安排第$i$批试验。所不同的是，这里第$i-1$批选出的"好点"，在第$i$批要作对照试验。

§1.2 最优分批问题

在文[2]中曾指出，在试验次数和试验批数预先给定的情况下，不同的分批方案对于试验效果影响甚大，这就是所谓"最优分批问题"。在不设对照试验情况，[3]和[5]已有详尽的研究。对于必须设对照试验的情况，当然也存在最优分批问题。今将最优分批方案说明如次：

设给定试验批数n和试验总次数$N+n-1$。

（一）当$n>1$，$N\geqslant 3n$时将N表成

$$N=ne+r\qquad(-n\leqslant r\leqslant n-1)$$

其中e为偶数，r为整数，这种表示法是唯一的，然后有三种情况：

（1）当$r=-n$时，最优分批方案是

$$(\underbrace{e,e,\cdots e}_{n-1},e-1)$$

（2）当$r\neq -n$，并且N与n的奇偶性不相同时，视$r\geqslant 0$或$r\leqslant 0$，最优分批方案分别是

$$(\underbrace{e,e+2,e,\cdots,e+2,e,}_{2\left[\frac{n-1-r}{4}\right]}\ \underbrace{e+2,\cdots,e+2,}_{r}\ \underbrace{e,e+2,\cdots e,e+2}_{2\left[\frac{n+1+r}{4}\right]})；$$

或：

$$(\underbrace{e,e+2,e,\cdots,e+2,e,}_{2\left[\frac{n-1+r}{4}\right]}\ \underbrace{e,\cdots,e,}_{-r}\ \underbrace{e,e+2,\cdots e,e+2}_{2\left[\frac{n+1+r}{4}\right]})$$

（3）当 $r=-n$，并且N与n有相同的奇偶性时，视 $r\geqslant 0$ 或 $r\leqslant 0$，最优分批方案分别是

$$(\underbrace{e,e+2,e,\cdots,e+2,e}_{2\left[\frac{n-2-r}{4}\right]},\ \underbrace{e+2,\cdots,e+2}_{r},\ \underbrace{e+2,e,\cdots e+2,e,e+1}_{2\left[\frac{n-r}{4}\right]})$$

或：

$$(\underbrace{e,e+2,e,\cdots,e+2,e}_{2\left[\frac{n+r}{4}\right]},\ \underbrace{e,\cdots,e}_{-r},\ \underbrace{e+2,e,\cdots e+2,e,e}_{2\left[\frac{n-2+r}{4}\right]}$$

（二）当 $1<n<N<3n$ 时，最优分配方案可从下面两个表得到。

表 1　n为偶数时的最优分批方案

N	$(k_1,k_2,\cdots\cdots k_n)$
$n+1$	$(\underbrace{2,\cdots\cdots,2}_{n})$
$n+2$	$(2,3,\underbrace{2,\cdots\cdots,2}_{n-2})$
$n+2+l\left(1\leqslant l\leqslant\frac{n-2}{2}\right)$	$(2,3,\underbrace{2,\cdots\cdots 2}_{n-2-2l},\ \underbrace{2,3,\cdots\cdots,2,3}_{2l})$
$\frac{3}{2}n+1+l\ \left(1\leqslant l\leqslant\frac{n}{2}\right)$	$(2,\underbrace{3,2,\cdots\cdots,3,2}_{n-2l},\ \underbrace{4,2,\cdots\cdots,4,2}_{2(l-1)},4)$
$2n+2l\left(1\leqslant l\leqslant\frac{n-4}{2}\right)$	$(2,3,\underbrace{4,\cdots\cdots,4}_{2l},\ \underbrace{2,4,\cdots\cdots,2,4}_{n-2-2l})$
$2n+2l+1\left(1\leqslant l\leqslant\frac{n-6}{2}\right)$	$(2,\underbrace{3,4,\cdots\cdots,4}_{2(l+1)},\ \underbrace{2,4,\cdots,2,4}_{n-6-2l},2,3)$
$3n-3$	$(2,\underbrace{3,4,\cdots\cdots,4}_{n-3},3)$
$3n-2$	$(2,3,\underbrace{4,\cdots\cdots,4}_{n-2})$
$3n-1$	$(2,\underbrace{4,\cdots\cdots,4}_{n-1})$

表 1 和表 2 将 $n<N<3n$ 的N分为 $n+1$，$n+2,\cdots\cdots 3n-1$ 九类，对每一类给出最优分批方案于表的右方。

§1.3　批数无限的情况

在实践中常用无穷最优方法。设 $(k_1,k_2+1,\cdots)(k_n\geqslant 1,\ n=1,2,\cdots)$ 是一无穷序贯。

表 2 n 为奇数时的最优分配方案

N	$(k_1, k_2 \cdots\cdots kn)$
$n+1$	$(\underbrace{2,2,\cdots\cdots,2}_{n})$
$n+2$	$(2,3,\underbrace{2,\cdots\cdots,2}_{n-2})$
$n+2+l\left(1\leqslant l\leqslant\frac{n-1}{2}\right)$	$(2,3,\underbrace{2,\cdots\cdots,2}_{n-1-2l},\ \underbrace{3,2,\cdots\cdots 3,2}_{2(l-1)},3)$
$\frac{3}{2}(n+1)+l\ \left(1\leqslant l\leqslant\frac{n-1}{2}\right)$	$(2,3,\underbrace{3,2,\cdots\cdots 3,2}_{n-1-2l},\ \underbrace{4,2,\cdots\cdots,4,2}_{2(l-1)},4)$
$2n+2l\left(1\leqslant l\leqslant\frac{n-5}{2}\right)$	$(2,3,\underbrace{4,\cdots\cdots,4}_{2l+1},\ \underbrace{2,4,\cdots\cdots,2,4}_{n-5-2l},2,3)$
$2n+2l+1\left(1\leqslant l\leqslant\frac{n-5}{2}\right)$	$(2,3,\underbrace{4,\cdots\cdots,4}_{2l+1},\ \underbrace{2,4,\cdots\cdots,2,4}_{n-3-2l})$
$3n-3$	$(2,3,\underbrace{4,\cdots\cdots,4}_{n-3},3)$
$3n-2$	$(2,3,\underbrace{4,\cdots\cdots,4}_{n-2})$
$3n-1$	$(2,\underbrace{4,\cdots\cdots,4}_{n-1})$

在[4]中已经证明，方程

$$\begin{cases} x_n = x(k_{n+1})\, x_{n+1} + \left[\dfrac{k_{n+1}+1}{2}\right] y_{n+1} \\ y_n = x(k_{n+1}+1)\, x_{n+1} + \left[\dfrac{k_{n+1}+2}{2}\right] y_{n+1} \end{cases} \quad (n \geqslant 0)$$

在条件 $x_0=1$ 下的解存在且唯一，特别，当 $k_1=k_2+1=k_3+1=\cdots\cdots=2k$ 时，其唯一解是

$$\begin{cases} x_n = i w^{n+1} & n \geqslant 0 \\ y_n = w^n \end{cases}$$

其中 $w=\dfrac{\sqrt{k(k+4)}-k}{2k}$ 当 $(k_1, k_2, \cdots\cdots)$ 中有无穷多个奇数时，其解满足 $2x_n \geqslant y_n > x_n > 0\ (n \geqslant 0)$，此时按照 § 1.1 构造 $\mathscr{F}_n$ 的办法，我们可以构造一个不设对照试验的 $(k_1, k_2, \cdots\cdots)$ 序贯试验方法 $\mathscr{W}$。又用 § 1.1 中构造 $\widetilde{\mathscr{F}}$ 的办法，我们得到必须设对照试验的 $(k_1, k_2+1, k_3+1, \cdots\cdots)$ 序贯试验方法 $\widetilde{\mathscr{W}}$。当 $k_1=k_2+1=k_3+1=\cdots\cdots=2k+1$ 时，命

$$x_n=\frac{1}{2(k+1)^n} \qquad (n\geqslant 1)$$
$$y_n=\frac{1}{(k+1)^n}$$

并取 $x_0=1$，我们也可以用§1.1的构造方法构造出 $\widetilde{\mathscr{W}}$。

在[6]中，我们讨论了不定批数条件下的最优性概念。特别，在不设对照实验情况下，对于 $k_n\equiv 2k(k\geqslant 1)$，每批等分取点的方法是最优的，而当 $k_n\equiv 1$ 时，黄金分割法是最优的。

§2 理 论 依 据

为应用方便，在§1中，我们已对各种不同情况详细地给出了"必须设对照试验"优选方法的具体方案。实质上，这些方法 $\widetilde{\mathscr{F}}_n$ 和 $\widetilde{\mathscr{W}}$ 都是普通意义下优选法 $\mathscr{F}_n$ 和 $\mathscr{W}$ 经过一个简单的"变换"得到的。在本节中，我们将给出这种变换的依据。

我们约定试验的初始区间为〔0,1〕，此区间上单峰函数的全体记作 $\mathscr{F}$，对每一个 $f\in\mathscr{F}$，以 c_f 表其峰值点。我们以 $\widetilde{f}$ 表示这样的有限序贯：$\{f_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}\subset\mathscr{F}$，它使得 $c_{f_i}=c_{f_1}$ $i=2,\cdots\cdots,n$，并以 $\widetilde{\mathscr{F}}$ 表示这种 $\widetilde{f}$ 全体所构成的集合。对于给定的正整数有限序贯 $(k_1,k_2,\cdots\cdots k_n)$，我们用 $\mathscr{P}$ 表示任意的 $(k_1,k_2\cdots\cdots,k_n)$ 序贯普通意义下的试验方法（或称为试验策略），$\mathscr{P}$ 作用于 $f\in\mathscr{F}$，在第 $i(1\leqslant i\leqslant n)$ 步试验后，必可断定 c_f 落在某个小区间 $[a_i,b_i]$ 内。在 $[a_i,b_i]$ 若含有已试点，则记之为 c_i，命

$$\Delta(\mathscr{P},f,n)=b_i-a_i \tag{1}$$

$$\delta(\mathscr{P},f,i)=\begin{cases}b_i-a_i, & \text{若 } c_i \text{ 不存在}\\ max\{c_i-a_i,\ b_i-c_i\}, & \text{若 } c_i \text{ 存在}\end{cases} \tag{2}$$

$$\Delta(\mathscr{P},i)=\sup_{f}\Delta(\mathscr{P},f,i) \tag{3}$$

$$\delta(\mathscr{P},i)=\sup_{f}\delta(\mathscr{P},f,i) \qquad (1\leqslant i\leqslant n) \tag{4}$$

$\delta(\mathscr{P},i)$ 称为 $\mathscr{P}$ 的 i 之步精度。

现在我们用 $\widetilde{\mathscr{P}}$ 表示任意的 $(k_1,k_2+1,\cdots\cdots k_n+1)$ 序贯的必须设对照试验的试验方法，它作用于 $\widetilde{f}$ 在第 i $(1\leqslant i\leqslant n)$ 步作用于单峰函数 f_i 并以前一批留下的好点作为对照试验点，对于每一个固定的 i，$\widetilde{\mathscr{P}}$ 作用于 f_i 之后可断定 c_{f_i} 必定落在某个 $[a'_i,b'_i]$ 之内，命

$$[\widetilde{a}_i,\widetilde{b}_i]=\bigcap_{j=1}^{i}[a'_i,b'_i] \tag{5}$$

由于 $c_{f_1}=c_{f_2}=\cdots\cdots=c_{f_n}$，易见这样定义的区间必定存在。而且在 $[\widetilde{a}_i,\widetilde{b}_i]$ 内至多有一个前 i 步的已试点，若这样的点存在，就记之为 $\widetilde{c}_i$，命

$$\Delta(\widetilde{\mathscr{P}},\widetilde{f},i)=\widetilde{b}_i-\widetilde{a}_i \tag{6}$$

$$\delta(\widetilde{\mathscr{P}},\widetilde{f},i)=\begin{cases}\widetilde{b}_i-\widetilde{a}_i, & \text{若 } \widetilde{c}_i \text{ 不存在}\\ max\{\widetilde{c}_i-\widetilde{a}_i,\ \widetilde{b}_i-\widetilde{c}_i\}, & \text{若 } \widetilde{c}_i \text{ 存在}\end{cases} \tag{7}$$

$$\Delta(\widetilde{\mathscr{P}},i)=\sup_{\widetilde{f}}\Delta(\widetilde{\mathscr{P}},\widetilde{f},i), \qquad (1\leqslant i\leqslant n) \tag{8}$$

$$\delta(\tilde{\mathscr{P}},i)=\sup_{\tilde{f}}\delta(\tilde{\mathscr{P}},\tilde{f},i)\quad(1\leqslant i\leqslant n)\tag{9}$$

$\delta(\tilde{\mathscr{P}},i)$ 称为$\tilde{\mathscr{P}}$的 i 步精度。如果对于任何的 $\tilde{\mathscr{P}}$，$\delta(\tilde{\mathscr{P}},n)\geqslant\delta(\tilde{\mathscr{Q}},n)$，则称$\tilde{\mathscr{Q}}$为 n 步最优的。本文的主要目的在于证明 §1.1 中所构造的$\tilde{\mathscr{F}}_n$是 n 步最优方法，即证明

定理 对于任何的$\tilde{\mathscr{P}}$，

$$\delta(\tilde{\mathscr{P}},n)\geqslant\delta(\tilde{\mathscr{F}}_n,n)\tag{10}$$

证明 首先，对于每一个$\tilde{\mathscr{P}}$，我们可以作一个通常意义下的试验方法 $\mathscr{P}'$ 与之对应：$\mathscr{P}'$作用于 f 的第 $i(1\leqslant i\leqslant n)$ 批试验点取为$\tilde{\mathscr{P}}$作用于$\tilde{f}_0=\{f_i:f_i\equiv f,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$ 的第 i 批除作对照用试点以外的试验点，这样一来，

$$\delta(\tilde{\mathscr{P}},\tilde{f}_0,i)\equiv\delta(\mathscr{P}',f,i),\quad 1\leqslant i\leqslant n$$

特别

$$\delta(\tilde{\mathscr{P}},\tilde{f}_0,n)=\delta(\mathscr{P}',f,n)$$

从而

$$\delta(\tilde{\mathscr{P}},n)\geqslant\delta(\mathscr{P}',f,n)$$

由于 $f\in\mathscr{F}$ 任意，故由[2]或[4]知

$$\delta(\tilde{\mathscr{P}},n)\geqslant\delta(\mathscr{P}',n)\geqslant\delta(\mathscr{F}_n,n)\tag{11}$$

另一方面，由 $\mathscr{F}_n$ 和 $\tilde{\mathscr{F}}_n$ 的构造方式不难看出 (12)

$$\delta(\tilde{\mathscr{F}}_n,\ n)=\delta(\tilde{\mathscr{F}}_n,n)$$

结合（11）与（12）便得（10），定理证毕。

上述定理建立了必须设对照试验条件下限定 n 批的最优方法。对于最优分批问题，无穷最优性和不定批数条件下的最优性问题均可由此简单地导出，譬如最优分批问题：若用$\mathscr{R}_n$表示普通意义下的最优分批法（见[3]或[5]），其分批方案设为$(k_1,k_2\cdots\cdots k_n)$，相应的有$\tilde{\mathscr{R}}_n$：$(k_1,\ k_2+1,\cdots\cdots k_n+1)$。设 $\tilde{\mathscr{F}}$ 是任意一种分批的最优方案，方案是 $(k'_1,\ k'_2+1\cdots\cdots k'_n+1)$，自然要求 n 和$\sum_{i=1}^{n}k_i=\sum_{i=1}^{n}k'_i=N$ 固定。相应的有 $\mathscr{F}_n$：$(k'_1,\ k'_2\cdots\cdots k'_n)$，则由通常意义下最优分批性和（12）

$$\delta(\tilde{\mathscr{F}}_n,n)=\delta(\mathscr{F}_n,n)\geqslant\delta(\mathscr{P}_n,n)=\delta(\tilde{\mathscr{R}}_n,n)$$

此即说明 $\tilde{\mathscr{R}}_n$ 是最优分批方法。

致谢：本文是在贵阳师院完成的，对于曾给予作者亲切关怀和宝贵支持的院系领导和同志们，作者始终怀着深深的敬意！

参 考 文 献

〔1〕陈国先，必须设对照试验的优选法，数学的实践与认识 1（1977）
〔2〕中国科学院数学研究所优选法小组，单因素优选法，数学的实践与认识 2（1973）
〔3〕吴方，一个求极值问题，中国科学 1（1974）
〔4〕洪加威，论批数不限定情况下一维优选问题的最优策略，中国科学 2（1974）
〔5〕齐景泰，袁云耀，吴方，一个求极值问题（Ⅱ），数学学报 2（1974）；Ⅲ，1（1975）
〔6〕陈木法，论在不定批数条件下单因素优选问题的最优策略，贵阳师院学报 3（1977）