数学系 2002 级三、四班数学分析补充材料（二）

（实数基本定理习题， 2002 年 10 月）

1 、从定义出发证明上、下确界的惟一性。

2 、设 $\beta=\sup E, \beta\notin E,$ 试证可从中选取数列 $\{x_n\}$ ，其极限为 β ；又若 $\beta\in E$ ，则情形如何？

3 、举例：（ 1 ）有上确界无下确界的数列；（ 2 ）含有上确界但不含有下确界的数列；（ 3 ）既含有上确界又含有下确界的数列；（ 4 ）既不含有上确界又不含有下确界的数列，其中上、下确界都有限。

4 、试证：收敛数列必有上确界和下确界；趋于 $+\infty$ 的数列必有下确界，趋于 $-\infty$ 的数列必有上确界。

5 、求数列的上、下确界：

(1) $x_n=1-\dfrac{1}{n}$; (2) $x_n=-n[2+(-2)^n]$;

(3) $x_{2k}=k, x_{2k+1}=1+\dfrac{1}{k}, k=1,2,3,...$; (4) $\sqrt[n]{|\cos\dfrac{n\pi}{3}|}$.

6 、证明：单调有界数列必有极限。

7 、试分析区间套定理的条件：若将闭区间列改成开区间列，结果怎样？若将条件 $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset[a_3,b_3]\supset...$ 去掉或将条件 $b_n-a_n\to 0(n\to\infty)$ 去掉，结果怎样？试举例说明。

8 、若 $\{x_n\}$ 无界，且不以 ∞ 为极限，则必存在两个子列 $x_{g(n)}\to\infty, x_{h(n)}\to a\,(a$ 为某有限数$)$, 其中 $\{g(n)\}$ 和 $\{h(n)\}$ 是两个严格单调的正整数列。

9 、有界数列 $\{x_n\}$ 若不收敛，则必存在两个子列 $x_{g(n)}\to b, x_{h(n)}\to a\,(n\to\infty)$, 其中 $a\neq b$.

10 、若在区间 $[a,b]$ 内的两个数列 $\{x_n\}$ 及 $\{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ ，则在此两数列中能找出具有相同足标 $g(n)$ 的子列，使 $\{x_{g(n)}\}$ 及 $\{y_{g(n)}\}$ 收敛于同一极限。

11 、证明：若 $a_n>0\,(n=1,2,3,...)$ 且 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\dfrac{1}{a_n}=1$ ，则数列 $\{a_n\}$ 收敛。

12 、证明：若 $\{a_n\}$ 为单调数列，则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

*13 、试证明：确界原理、单调有界定理、闭区间套定理、有限覆盖定理 (海涅 - 波莱尔， Heine-Borel) 、聚点定理、致密性定理 (Weierstrass ，魏尔斯特拉斯) 、柯西（ Cauchy) 收敛定理两两等价。

14 、记 $a_n=\left\{(1+\dfrac{1}{n})^n\right\}, b_n=\left\{(1+\dfrac{1}{n})^{n+1}\right\}, n\in N_+$. 证明： (1) 数列 $\{a_n\}$ 单调增加有界； (2) 数列 $\{b_n\}$ 单调减少有界；（ 3 ） $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=e$. 其中 $e=2.71828\cdots$ 是自然对数的底。

15 、用上题结论证明下列数列收敛且有共同极限（这极限被称为欧拉常数 $\gamma=0.577\,215\,664\,901\,532\,860\,606\,51\cdots$) ：

(1) $D_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$; (2) $E_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln(n+1)$.

16 、设 $x_1=\sin a, x_{n+1}=\sin x_n,\ n=1,2,....$ 证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛。