热烈庆祝
《数学通报》创刊七十周年！

谈中学数学课程中“实数”概念的引入

王昆扬（北京师范大学数学科学学院）
email: wangky@bnu.edu.cn

（ 2006 年 10 月 29 日）

1 我们要谈实数的表示，藉此证明实数系的完备性。但不是从哲学的角度谈实数的定义

2 为什么要谈这个问题

在过去的中学课本中，实数的概念是从初中二年级引入的。但从那以后，对这个十分基本十分重要的概念，再也没有任何进一步的解释。使学生一直停留在感性的“承认”的水平上。这种状况，甚至到了大学，不少数学系的课本也无长进，部分数学系的课本。搬出 Dedekind 分割来“定义”实数，使得这个基本概念，理解起来回到了历史上曾长期保留的难度。我之所以要谈这个问题，是想把事情说得严格而又简单，便于中学师生的理解，提高喜欢数学的人们的数学修养，特别是提高中学和大学数学老师的数学修养。学生可以暂时或永远不知道这回事，老师还是应该心中有“数”。

3 这个问题是容易谈清楚的

从 1977 年我就开始谈这个问题。最初在《数学通报》第 10 、 11 两期（ 1977 年）连载了“极限、实数和初等函数”一文，后来在《高等数学研究》（专集， 1999 ）发表了“怎样讲实数理论”一文，完整地介绍了我对这部分内容的讲法。后来为中学教师国家级培训编写了小册子《数学分析基础》（未出版），其中一开始就谈这个问题，讲了两届。我编的专升本教材《数学分析专题研究》（高等教育出版社， 2000 年）和大学数学系教材《简明数学分析》（面向 21 世纪教材，高等教育出版社， 2000 年）当中都详细地讨论了这个问题。我和我的同事为七届大学生讲过这个问题。去年春天我为北京四中高二学生的课外讲座中也讲了这个问题。教学实践中，没有发现学生不能接受的现象。

§1　有理数及有理数列

在九年义务教育三年制初级中学教科书《代数》第二册（人民教育出版社， 1993)中，明确地定义： **无限不循环小数叫做无理数**。

请问：你是怎样理解这个定义的？譬如说，我们知道两个无理数 $\sqrt{2}=1.41421356\cdots$ 和 $\pi=3.14159265\cdots$. 能说出他们的和或他们的积是多少吗？进一步问，你是按照怎样的法则确定两个十进小数的“和”、“积”的？

要严格地回答这些问题，必须引入有理数列的极限的概念. 在对于有理数和有理数列的极限进行了完整的讨论之后，我们就能顺利地前进到对于我们早已有了足够的感性认识的“实数”概念进行严格的理性的讨论。

下面的定义是众所周知的.

定义 1.1　正的整数和分数，负的整数和分数以及零，叫做有理数.

有理数 (rational nuber) 的本意该是“比例”数. 是不是“raio”（比例）一词在形容词化时变成 rational, 而后就翻译成“有理”了？可参阅项武义教授的 [1](15 页，“非比实数”).

根据定义 1.1 ，我们要理解“无限不循环小数叫做无理数”，就应该先证明有理数不是“无限不循环小数”. 不然的话，我们的定义就失去了概念的确定性，就不成其为定义. 那么，不是“无限不循环小数”的数又是什么数呢？

我们来回想一下一些熟知的概念. 用 $\mathbb{N}_+$ 代表全体正整数所成的集合. 设 $m\in\mathbb{N}_+$,

$$a_k\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\ k=1,\cdots,m.$$

采用十进制，我们把形如 $0.a_1,\cdots,a_m$ 的数叫做有限小数，它的值是

$$\frac{a_1}{10}+\cdots+\frac{a_m}{10^m}=\frac{a_1\cdots a_m}{10^m}.$$

我们还知道， $\dfrac{1}{3}=0.333333\cdots$, 并且把它叫做以 3 为循环节的“无限循环小数”，简单地记作 $0.\dot{3}$. 请问，你是怎样理解这个数的？你可能会说，不管 $m\in\mathbb{N}_+$ 多么大， $0.\dot{3}$(也就是 $\frac{1}{3}$) 都比有限小数

$$0.\overbrace{3\cdots3}^{m\text{个}}$$

大，而且比有限小数

$$0.\overbrace{3\cdots3}^{m\text{个}}4$$

小. 这个理解是正确的. 如果把对于 $0.\dot{3}$ 的这种解释一般化, 抽象出来, 就必定导致有理数列的 **极限** 的概念. 现在我们就来叙述有理数列的极限的定义. 正是由于我们还不曾说明白什么是无理数, 也就是说, 我们还并不真正理解 "无限不循环小数", 而且我们的目的就是要说清楚什么是无理数, 所以我们现在只能在有理数的范围内说话.

先说一说什么是有理数列.

设 A 和 B 都是不空的集合 (简称为 "集"). 若有一个法则, 使得对于 A 的任意一个元素 (简称为 "元")a, 按照这个法则, 有 B 中唯一一个元素 a' 与之对应, 那么我们就说这个法则是从 A 到 B 的映射. 可用随便一个英文字母来代表映射. 设 T 是集 A 到集 B 的映射, $a \in A$ (读作 a 属于 A, 有时也把 $a \in A$ 写作 $A \ni a$). 把按照法则 T, 在 B 中那个与 a 对应的元 a' 叫作 a 在映射 T 下的象, 记作 $T(a)$. 用符号 $\{T(a):\ a \in A\}$ 表示 A 的一切元的象的全体所成的集合, 简记为 $T(A)$, 叫作 A 在 T 下的象 (或值域).

我们用 $\mathbb{Q}$ 代表全体有理数所成的集合。

定义 1.2 (有理数列) 若 f 是从 $\mathbb{N}_+$ 到 $\mathbb{Q}$ 的映射,则称 f 为数列,记做 $f = \{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$. 当然, 也可用其它记号, 如 a_n, b_n 等来代表 $f(n)$. 也可以把数列展开来写成

$$(f(1), f(2), f(3), \cdots).$$

注意, f 的值域 $f(\mathbb{N}_+) = \{f(n):\ n \in \mathbb{N}_+\}$ 与数列 $f = \{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是两回事. 例如, 当 $f(n)$ 恒等于 1 时, 数列 $f = (1, 1, 1, \cdots)$, 但 $f(\mathbb{N}_+) = \{1\}$ 是一个只含数 1 为其元素的单元素集.

定义 1.3(有理数列的极限) 设 $f = \{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个有理数列.

(1) 如果有一个有理数 ℓ, 使得对于任意的 $k \in \mathbb{N}_+$, 总找得到 $n_k \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > n_k$ 时 $|f(n) - \ell| < \dfrac{1}{k}$, 那么, 就说数列 f 收敛到极限 ℓ, 记做 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \ell$.

(2) 如果对于任意的 $k \in \mathbb{N}_+$, 总找得到 $n_k \in \mathbb{N}_+$, 使得当 $n > n_k$ 时 $f(n) > k$, 那么, 就说数列 f 发散到极限 ∞(读做正无穷), 记做 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \infty$.

(3) 如果对于任意的 $k \in \mathbb{N}_+$, 总找得到 $n_k \in \mathbb{N}_+$, 使得当 $n > n_k$ 时 $f(n) < -k$, 那么, 就说数列 f 发散到极限 $-\infty$(读做负无穷), 记做 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = -\infty$.

从定义 1.3 看到, $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到 ℓ 与 $\{f(n) - \ell\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到 0 等价, 也与数列 $\{|f(n) - \ell|\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到 0 等价.

说明一下, ∞ 和 $-\infty$ 都只是符号而不是数. 但为了方便, 我们规定, 对于任意的数 a,

$$-\infty < a < \infty.$$

例 1　自然数列 $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ 发散到 ∞.

例 2　设 $q \in \mathbb{Q}$, $q > 0$. 数列 $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$ 是我们熟知的公比 (即后一项与前一项的比) 为 q 的等比数列. 显然，当 $q > 1$ 时

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \infty.$$

而当 $0 < q < 1$ 时

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

例 3　设 $q \in \mathbb{Q}$, $0 < q < 1$. 令 $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k$, $n \in \mathbb{N}_+$. 这个符号的意思是

$$\sum_{k=0}^{n} q^k := 1 + q^1 + \cdots + q^n.$$

我们用 “:=” 表示等号右边的内容是冒号左边的符号的定义.

我们来考察数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限. 我们知道,

$$s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

显然

$$0 < \frac{1}{1-q} - s_n = \frac{q^{n+1}}{1-q}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-q} - s_n = 0.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}.$$

定义 1.4(基本列)　设 $f = \{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是数列. 如果对于任意的 $k \in \mathbb{N}_+$, 总找得到 $n_k \in \mathbb{N}_+$, 使得当 $m, n > n_k$ 时 $|f(m) - f(n)| < \dfrac{1}{k}$, 那么, 就说数列 f 是基本列 (或 Cauchy 列).(Cauchy, A.L., 1789—1857)

定理 1.1　收敛数列必是基本列.

证　设数列 f 收敛到 ℓ. 那么, 不管 $k \in \mathbb{N}_+$ 多大, 总找得到 $n_k \in \mathbb{N}_+$, 使得当 $n > n_k$ 时，$|f(n) - \ell| < \dfrac{1}{2k}$. 于是，当 $m, n > n_k$ 时,

$$|f(m) - f(n)| < |f(m) - \ell| + |\ell - f(n)| < \frac{1}{k}.\square$$

定义 1.5(子列)　设 f 和 g 都是数列，g 只取自然数值且严格增, 即对于一切 $n \in \mathbb{N}_+$, 有 $\mathbb{N}_+ \ni g(n) < g(n+1)$. 那么，称数列 $\{f(g(n))\}_{n=1}^{\infty}$ 为 f 的子列，记之为 $f \circ g$.

通俗地说，子列就是从原数列中保持原顺序，挑出无限多项所成的数列.

定义 1.6 设 f 和 g 都是数列. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(f(n)-g(n)\Big)=0$ 那么就说 f 和 g 等价.

显然，数列的等价关系具有反身性、对称性和传递性. 也就是说，任何数列 f 必与自己等价；若 f 与 g 等价，则 g 与 f 等价；若 f 与 g 等价，且 g 与 h 等价，则 f 与 h 等价.

定理 1.2 若数列 f 有极限 ℓ,(ℓ 可以是有理数，可以是 ∞ 也可以是 $-\infty$), 则任何与它等价的数列也有极限 ℓ.

定理的证明是简单的，略去.

定理 1.3 若 f 是基本列，则它的子列与它等价.

定理的证明是简单的，略去.

定理 1.4 若 f 和 g 分别收敛到 a 和 b, 且 $c,d\in\mathbb{Q}$, 那么

$$\lim_{n\to\infty}\Big(cf(n)+dg(n)\Big)=ca+db,\quad \lim_{n\to\infty}\Big(f(n)g(n)\Big)=ab.$$

如果还知 $b\neq 0$, 那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\frac{a}{b}.$$

注. 由于 $b\neq 0$, 当 n 充分大时必有 $g(n)b>0$ 成立，所以 $\frac{f(n)}{g(n)}$ 对于一切大的 n 有定义. 那么，谈到它的极限，总把前有限项使 $g(n)=0$ 者略去不要.

定理的证明是简单的，略去.

最后我们规定，说一个数列 $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是有上界的，指的是存在一个数 a, 使得对于每个 $n\in\mathbb{N}_+$ 都有 $f(n)<a$; 说一个数列 $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是有下界的，指的是存在一个数 b, 使得对于每个 $n\in\mathbb{N}_+$ 都有 $f(n)>b$; 说一个数列 f 有界，指的是它既有上界又有下界. 显然，极限为 ∞ 的数列无上界，而极限为 $-\infty$ 的数列无下界. 收敛的数列是有界的).

§2　有理数的小数表示

下面我们从极限的观点对于有理数的十进计数制表示，简称为十进表示，做一个严格的讨论.

定义 2.1　设 $k \in \mathbb{N}_+$, $a_k \in \{0, 1, \cdots, 9\}$, 并且不管 N 多大，都存在 $k > N$ 使得 $a_k < 9$. 设 $p \in \mathbb{Z}$. 称记号

$$p + 0.a_1a_2a_3\cdots\cdots \tag{2.1}$$

为 **十进小数**(简称为小数), 称 p 为它的整部.

定义 2.2　设 $p + 0.a_1a_2a_3\cdots\cdots$ 是一个十进小数，简记之为 A. 令

$$A_n = p + 0.a_1\cdots a_n = p + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

称有理数列

$$\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \tag{2.2}$$

为 **与小数 A 对等的数列**. 与一个小数对等的数列叫做 **标准列**.

命题 2.1　标准列是基本列.

证　设 $g = \{p + f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是标准列，其中

$$f(n) = 0.a_1a_2\cdots a_n, \ n \in \mathbb{N}_+.$$

对于任给的 $k \in \mathbb{N}_+$, 当 $\mu, \nu \in \mathbb{N}_+$ 且 $\mu, \nu > k$ 时显然有

$$|g(\mu) - g(\nu)| = |f(\mu) - f(\nu)| < 10^{-k} < \frac{1}{k}.\square$$

定义 2.3　设 $m \in \mathbb{N}_+$, $a_1, \cdots, a_m$ 是 m 个不全为 9 的取值于 $\{0, 1, \cdots, 9\}$ 的数字. 设 $p \in \mathbb{Z}$. 把小数

$$p + 0.a_1\cdots a_m a_1\cdots a_m\cdots\cdots \tag{2.3}$$

叫做以 $a_1\cdots a_m$ 为循环节的 (十进)**循环小数**, 简记之为

$$p + 0.\dot{a}_1\cdots\dot{a}_m.$$

以数字 0 为循环节的小数，略去其循环节，就是第一讲中说过的有限小数，如 $0.2\dot{0} = 0.2$. 如果 $b_1, \cdots b_\mu \in \{0, 1, \cdots, 9\}$ $(\mu \in \mathbb{N}_+)$, 则也把小数

$$p + 0.b_1\cdots b_\mu a_1\cdots a_m a_1\cdots a_m\cdots\cdots \tag{2.4}$$

叫做以 $a_1\cdots a_m$ 为循环节的 (十进)**循环小数**, 简记之为

$$p+0.b_1\cdots b_\mu\dot{a}_1\cdots\dot{a}_m.$$

注 按定义 2.3, 同一个循环小数可以有不同的记法 (和不同的循环节). 例如小数

$$0.01010101\cdots\cdots$$

既可以写成 $0.0\dot{1}$ 也可以写成 $0.01\dot{0}$. 而且， $0.\dot{2}$ 和 $0.\dot{2}\dot{2}$ 表示同一个数. 但无论如何，单个数字 9 不可以是循环节.

设 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是与小数 (2.3) 对等的数列. 那么它的第 mn 项为

$$A_{mn}=p+(0.a_1\cdots a_m)(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{10^{mk}}).$$

从而，根据第一讲例 3 讨论过的事实，有理数列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到下述极限：

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}A_{mn}=p+\frac{0.a_1\cdots a_m}{1-\frac{1}{10^m}}\in\mathbb{Q}. \tag{2.3'}$$

同理，与小数 (2.4) 对等的数列收敛到

$$p+0.b_1\cdots b_\mu+\frac{0.a_1\cdots a_m}{(1-\frac{1}{10^m})10^\mu}\in\mathbb{Q}. \tag{2.4'}$$

定义 2.4 把循环小数 (2.3) 和 (2.4) 分别叫做它们所对等的有理数列 (标准列) 的极限 (2.3′) 和 (2.4′) 的小数表示.

命题 2.2 不同的循环小数所表示的有理数是不同的.

证 设 $p+0.c_1c_2c_3\cdots\cdots$ 和 $q+0.d_1d_2d_3\cdots\cdots$ 是两个 (形如 (2.3) 或 (2.4) 的) 不同的循环小数， $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ 分别是与它们对等的有理数列.

如果 $p\neq q$, 无妨认为 $p>q$, 那么，我们可以找到某 $k\in\mathbb{N}_+$ $k>2$ 使得 $d_k<9$. 于是当 $n>k$ 时,

$$C_n\geq p,\quad D_n\leq q+0.9\cdots9(d_k+1)\leq q+\frac{10^k-1}{10^k}.$$

那么，当 $n>k$ 时

$$C_n-D_n\geq p-q-1+\frac{1}{10^k}\geq\frac{1}{10^k}.$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}C_n\geq\lim_{n\to\infty}D_n+\frac{1}{10^k}.$$

设 $p=q$. 那么存在一个自然数 ℓ, 使得 $c_\ell \neq d_\ell$, 且当自然数 $j<\ell$ 时 $c_j=d_j$. 无妨认为 $c_\ell > d_\ell$. 那么，我们可以找到某 $k\in\mathbb{N}_+$ $k>\ell$ 使得 $d_k<9$. 于是当 $n>k$ 时，

$$C_n \geq p+0.c_1\cdots c_\ell\cdots c_k,\quad D_n\leq p+0.d_1\cdots d_\ell\cdots(d_k+1).$$

那么，当 $n>k$ 时

$$C_n-D_n\geq\frac{1}{10^k}.$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}C_n\geq\lim_{n\to\infty}D_n+\frac{1}{10^k}.$$

证毕. □

从另一方面来说，我们有下述命题.

命题 2.3 任意一个有理数都可以表示成形如 (2.3) 或 (2.4) 的十进循环小数.

证 我们只需证明每个正的真分数都可以表示成形如 (2.3) 或 (2.4) 的十进循环小数.

设 $r=\frac{m}{n}$ 是即约分数， $m,n\in\mathbb{N}_+,\ m<n$. 那么，存在 $r_1,m_1\in\mathbb{Z}_+$, 满足

$$10m=r_1n+m_1\quad 0\leq r_1\leq 9,\ 0\leq m_1<n.$$

同理，存在 $r_2,m_2\in\mathbb{Z}_+$, 满足

$$10m_1=r_2n+m_2\quad 0\leq r_2\leq 9,\ 0\leq m_2<n.$$

继续下去，一般地得到 $r_k,m_k\in\mathbb{Z}_+$ $k\in\mathbb{N}_+$, 满足

$$10m_k=r_{k+1}n+m_{k+1}\quad 0\leq r_{k+1}\leq 9,\ 0\leq m_{k+1}<n.$$

由于 $0\leq m_k<n$, 所以在 $m_1,\cdots,m_{n+1}$ 这 $n+1$ 个小于 n 的非负整数中，至少有两个是相等的. 也就是说，一定存在一个 $\nu\in\mathbb{N}_+,\nu\leq n$, 使得 $m_{\nu+1}$ 与 $m_1,\cdots,m_\nu$ 中的一个数相同，设这个数是 m_μ $(\mu\in\{1,\cdots,\nu\}$, 并且诸 $m_1,\cdots,m_\nu$ 两两不同. 于是我们得到

$$\begin{aligned}10^\mu m&=10^{\mu-1}r_1n+10^{\mu-1}m_1\\&=10^{\mu-1}r_1n+10^{\mu-2}r_2n+10^{\mu-2}m_2\\&=10^{\mu-1}r_1n+10^{\mu-2}r_2n+\cdots+10^{\mu-\mu}r_\mu n+m_\mu.\end{aligned}$$

由此可见

$$\frac{m}{n}=0.r_1\cdots r_\mu+\frac{m_\mu}{10^\mu n}.\tag{2.5}$$

我们知道

$$
\begin{aligned}
&10m_\mu = r_{\mu+1}n + m_{\mu+1},\\
&10m_{\mu+1} = r_{\mu+2}n + m_{\mu+2},\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&10m_\nu = r_{\nu+1}n + m_{\nu+1}.
\end{aligned}
$$

把 $\nu+1-\mu$ 记作 p, 把 $r_{\mu+j}$ 记作 a_j, $j=1,\cdots,p$. 那么,

$$10^p m_\mu = 10^{p-1}a_1 n + \cdots + 10^0 a_p n + m_{\nu+1}.$$

也就是说

$$\frac{m_\mu}{n} = 0.a_1\cdots a_p + \frac{m_{\nu+1}}{10^p n}.$$

为简单，把小数 $0.a_1\cdots a_p$ 记作 a. 注意到 $m_\mu = m_{\nu+1}$, 我们得到

$$\frac{m_\mu}{n} = a + \frac{m_\mu}{n}\frac{1}{10^p}.$$

从而

$$\frac{m_\mu}{n} = \frac{a}{1-\frac{1}{10^p}}. \tag{2.6}$$

由于 $m_\mu < n$, 所以 $a < 1 - \frac{1}{10^p} = 0.9\cdots 9$. 这表明， $a_1,\cdots,a_p$ 不可能全是 9. 我们看到 $\frac{m_\mu}{n}$ 是以 $a_1\cdots a_p$ 为循环节的十进循环小数.

把 (2.6) 代入 (2.5) 得

$$\frac{m}{n} = 0.r_1\cdots r_\mu + \frac{1}{10^\mu}\frac{a}{1-\frac{1}{10^p}}. \tag{2.7}$$

根据 (2.4′), 我们看到，有理数 $\frac{m}{n}$ 是以 $a_1\cdots a_p$ 为循环节的十进循环小数. □

把命题 2.2 和命题 2.3 合起来就得到下述定理.

定理 (按定义 2.4) 每个有理数都有唯一一个循环小数为其表示，每个循环小数也都表示一个有理数.

按此定理，我们把有理数与其小数表示等同看待. 例如，若 $a\in\mathbb{Q}$, a 的小数表示是 $p+0.a_1a_2a_3\cdots\cdots$, 那么我们记

$$a = p + 0.a_1a_2a_3\cdots\cdots. \tag{2.8}$$

这与我们在初级中学学过的知识是一样的. 然而，我们现在的认识提高了一步，因为我们知道了，循环小数所表示的有理数乃是与这个循环小数对等的标准列的极限. 以后我们把与一个有理数的小数表示对等的标准列，也叫做与这个有理数对等的标准列.

设 (2.8) 是有理数 (即循环小数). 把与它对等的标准列记做 $f=\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$. 那么, f 是一个单调增的数列 (即前项不大于后项的数列), 并且对于任意的 $m,n\in\mathbb{N}_+$, 当 $m>n$ 时,

$$f(n)\le f(m)\le f(n)+\frac{1}{10^n}.$$

令 $m\to\infty$, 得到

$$f(n)\le a=\lim_{m\to\infty}f(m)\le f(n)+\frac{1}{10^n}. \tag{2.9}$$

这个式子给出了有理数和与它对等的标准列的第 n 项的偏差.

§3 实数的十进制表示

仍使用习惯了的十进制计数法 (虽然二进制更简单).

我们知道，边长为 1 的正方形的对角线的长度 $\sqrt{2}$ 不是有理数.

我们早就学过手工计算 $\sqrt{2}$ 的开平方法. 这个算法的原理是公式

$$(10a+b)^2=100a^2+20ab+b^2.$$

我们可以轻而易举地算出 $\sqrt{2}$ 的精确到小数点后第五位的小数近似值，即

$$1.41421<\sqrt{2}<1.41422.$$

从原则上来说，我们可以通过手算把精确度提高到小数点后任意的位数. 也就是说，我们可以算得一个标准列，它的极限就是 $\sqrt{2}$. 换句话说，我们可以得到 $\sqrt{2}$ 的小数表示 (就象 §2 定义 2.4 规定的那样), 当然，这个小数不是循环小数.

上述只是用十进小数表示无理数的一个特例. 现在我们正式引入实数的定义.

定义 3.1(实数) 定义 2.1 中的十进小数叫做 **实数**. 全体实数所成的集合记做 $\mathbb{R}$. 实数中的不循环小数 (见定义 2.3) 叫做 **无理数**. 如果 $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个标准列，我们就把与它对等的实数记作 $\tilde{f}$.

在 §2 中, 我们已看到，一个循环小数与它所表示的有理数是等同的. 所以在定义 3.1 中不必再规定有理数.

这个定义与我们在本章开头所说的，初中二年级的课本中叙述过的是一样的. 但以前我们不知道， **一个十进小数所表示的实数，乃是与这个小数对等的标准列的极限**. 在 §2 中我们已对于循环小数证明了这一点. 从而使得我们对于有理数的小数表示的认识，有了一个本质的提高. 现在我们面临的问题是，统一地来证明这个结论. 这才能使我们对于实数的认识从本质上达到完善的程度. 否则我们的认识将滞留在初等的水平上.

我们强调一下，标准列与实数之间，按照第二节定义的对等关系是一一对应的．因此可将二者等同看待．

定理 3.1 任给一个有理数的基本列，存在唯一一个标准列与之等价．

证 设 $f=\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是基本列．

把有理数 $f(n)$ 写成十进 (循环) 小数，$f(n)=p_n+0.a_1^n a_2^2 a_3^n\cdots$, 其中 $p_n\in\mathbb{Z}_+$, $a_k^n\in\{0,1,\cdots,9\}$ $k\in\mathbb{N}_+$. 显然，$\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是由非负整数组成的有界数列. 所以，必存在非负整数 p, 它在此数列中出现无限次. 把使得 $p_n=p$ 的项 $f(n)$ 顺次取出来构成数列 $\{f_1(n)\}_{n=1}^{\infty}$. 它是 f 的子列，且有小数表示 $f_1(n)=p+0.b_1^n b_2^n b_3^n\cdots$. 由于 $b_1^n\in\{0,1,\cdots,9\}$, 所以存在 $q_1\in\{0,1,\cdots,9\}$, 它在数列 $\{b_1^n\}_{n=1}^{\infty}$ 中出现无限次．把此数列中使 $b_1^n=q_1$ 的项顺次取出来构成数列 $\{f_2(n)\}_{n=1}^{\infty}$. 它是 f_1 的子列，且有小数表示 $f_2(n)=m+0.q_1c_2^n c_3^n\cdots$.

无限地重复这一步骤，得到一串数列 $f_k=\{f_k(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $k\in\mathbb{N}_+$. 其中 f_1 是 f 的子列，f_2 是 f_1 的子列，f_{k+1} 是 f_k 的子列 $(k\in\mathbb{N}_+)$, 并且 f_{k+1} 的第 n 个元可写成如下形状的十进小数：

$$f_{k+1}(n)=p+0.q_1\cdots q_k h_{k+1}^n h_{k+2}^n\cdots.$$

令 $u(n)=p+0.q_1\cdots q_n,\quad n\in\mathbb{N}_+$. 那么

$$0\le f_{n+1}(n)-u(n)\le 10^{-n}.$$

从而数列 $u:=\{u(n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是与 f 等价的基本列.

当 $0.q_1q_2q_3\cdots$ 不以 9 为循环节时，u 是标准列.

若 $0.q_1q_2q_3\cdots$ 以 9 为循环节，则有两种可能性．一是所有的 q_k 全部为 9, 这时我们定义数列 $v(n)=p+1$, $n\in\mathbb{N}_+$. 另一种可能的情况是，存在 $N\in\mathbb{N}_+$, 使得 $q_{_N}<9$ 而当 $k>N$ 时恒有 $q_k=9$. 在这种情况下，定义：

$$h_k=\begin{cases} q_k & \text{当 } 1\le k<N \text{ 时},\\ q_{_N}+1 & \text{当 } k=N \text{ 时},\\ 0 & \text{当 } k>N \text{ 时}.\end{cases}$$

并定义 $v(n)=p+0.h_1\cdots h_n$. 那么，在任何情况下，$v=\{v(n)\}_{n=1}^{\infty}$ 都是标准列，并且

$$|u(n)-v(n)|<10^{-n}.$$

从而，v 与 u 等价．根据定理 1.3, v 与 f 等价.

另外，容易看出，不相同的两个标准列是不可能等价的 (参阅 §2 命题 2.2 的证明).□

定理 3.2 任给标准列 $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{g(n)\}_{n=1}^{\infty}$. 那么

(a) $\{f(n)+g(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{f(n)g(n)\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{-f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ 都是基本列.

(b) 如果存在 $N\in\mathbb{N}_+$ 使得当 $n>N$ 时， $f(n)\neq 0$, 那么 $\left\{\dfrac{1}{f(n+N)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 也是基本列.

证 结论 (a) 是明显的. 我们来证结论 (b).

设 $f(n)=p+0.a_1a_2a_3\cdots a_n$, 其中， $p\in\mathbb{Z}$, $0.a_1a_2a_3\cdots$ 是不以 9 为循环节的小数. 并设 $f(N)\neq 0$. 若 $f(N)>0$ 则当 $n>N$ 时,

$$f(n)\geq f(N)>0.$$

若 $f(N)<0$ 则必有 $p<0$ 且 $f(n)\leq -1+0.a_1\cdots a_n$. 由于诸 a_k 不全为 9, 可设 $a_\ell<9$. 那么当 $n>\ell$ 时,

$$f(n)\leq f(\ell)+10^{-\ell}\leq -10^{-\ell}.$$

从而,

$$|f(n)|\geq 10^{-\ell}.$$

总之，在任何情况下，都存在正数 $\delta\in\mathbb{Q}$ 以及 $\ell\in\mathbb{N}_+$, 使得当 $n>\ell$ 时

$$|f(n)|\geq\delta.$$

那么，当 $\mu,\nu>\ell+N$ 时

$$|\frac{1}{f(\mu)}-\frac{1}{f(\nu)}|\leq\delta^{-2}|f(\mu)-f(\nu)|.$$

由此可见，结论 (b) 成立. $\square$

定义 3.2 (实数的四则运算) 设 f,g 都是标准列. 把与 $\{f(n)+g(n)\}_{n=1}^{\infty}$ 等价的标准列记做 $f+g$; 把与 $\{f(n)g(n)\}_{n=1}^{\infty}$ 等价的标准列记做 fg. 规定实数 $\tilde{f}$ 与实数 $\tilde{g}$ 的和与乘积如下：

$$\tilde{f}+\tilde{g}=\widetilde{f+g};\quad \tilde{f}\tilde{g}=\widetilde{fg}.$$

并把与 $\{-f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ 等价的标准列记做 $-f$, 那么与标准列 $-f$ 对等的实数为 $\widetilde{-f}$. 把 -1 与 $\tilde{f}$ 的乘积规定为 $-\tilde{f}=\widetilde{-f}$. 把 $\tilde{f}+(-\tilde{g})$ 叫做 $\tilde{f}$ 与 $\tilde{g}$ 的差，记做 $\tilde{f}-\tilde{g}$. 如果存在 $N\in\mathbb{N}_+$ 使得当 $n>N$ 时， $f(n)\neq 0$, 那么把与 $\{\dfrac{1}{f(n+N)}\}_{n=1}^{\infty}$ 等价的标准列记做 $\dfrac{1}{f}$. 规定

$$\frac{1}{\tilde{f}}=\widetilde{\left(\frac{1}{f}\right)}.$$

定义 3.3 (实数的大小)　给定实数 $r = p + 0.a_1a_2a_3\cdots$, 其中 $p \in \mathbb{Z}$. 如果 $p \geq 0$ 而 p 以及诸 a_n 不全是零，则称 r 为正数，记做 $r > 0$; 如果 p 以及诸 a_n 全是零，则称 r 为零，记做 $r = 0$; 如果 $p < 0$, 则称 r 为负数，记做 $r < 0$. 若实数 a, b 满足 $a - b > 0$, 则说 a 大于 b 记做 $a > b$, 或说 b 小于 a 记做 $b < a$. 把“不大于”记做“ $\leq$ ”，“不小于”记做“ $\geq$ ”.

例 1　设实数

$$\alpha = 0.a_1a_2a_3\cdots, \qquad \beta = 0.b_1b_2b_3\cdots.$$

如果存在一个数 $k \in \mathbb{N}_+$, 使得 $a_k < b_k$, 而当 $j < k$ 时 $a_j = b_j$. 那么 $\alpha < \beta$.

证　设

$$\gamma_n = 0.b_1\cdots b_n - 0.a_1\cdots a_n, \quad \gamma = \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

根据定义，实数 $\beta - \alpha$ 等于与基本列 γ 等价的标准列所对等的实数. 由于必有某 $m > k$ 使得 $a_m \leq 8$, 所以当 $n \geq m$ 时,

$$\gamma_n \geq 0.b_1\cdots b_n - 0.a_1\cdots a_n\cdots a_m \geq 10^{-m}.$$

从定理 3.1 的证明可以看到，如果一个基本列的第 n 项，当 $n \geq m$ 时都不小于 10^{-m}, 那么与它等价的标准列的第 n 项，当 $n \geq m$ 时也都不小于 10^{-m}. 从而它所对等的实数大于零. 即 $\alpha < \beta$. □

例 2　根据例 1，如果实数

$$\alpha = 0.\overbrace{0\cdots0}^{\text{n 个}}a_{n+1}a_{n+2}\cdots$$

那么 $0 \leq \alpha < 10^{-n}$.

注 1　定义 3.2 规定的运算，对于有理数之间的运算，与我们熟知的规则是一致的. 这是因为，每个有理数都是与表示它的循环小数对等的标准列的极限.

注 2　定义 3.3 规定的大小关系，对于有理数之间的比较，也与 $\mathbb{Q}$ 中熟知的大小关系完全一样.

我们知道，在有理数列的极限的定义中，只涉及到有理数间的加减运算和大小比较 (见第一节). 现在我们已定义了实数的加减运算和大小比较，它包含了关于有理数的加减运算和大小比较为其特例. 所以第一节关于数列极限的定义可以原样推广到实数列的情形. 也就是说，§1 中在有理数集 $\mathbb{Q}$ 中进行的关于数列的一切讨论，在实数集 $\mathbb{R}$ 中全部适用. 例如，我们可以把实数列收敛的定义叙述如下.

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个实数列，a 是一个实数. 如果对于任给的 $\varepsilon > 0$, 总找得到 $N \in \mathbb{N}_+$, 使得只要 $n > N(n \in \mathbb{N}_+)$ 就有 $|a_n - a| < \varepsilon$, 那么就说数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到 a, 记做

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

在实数范围内，作为定义，一个数列如果不收敛，就叫做是发散的.

从现在开始，我们的讨论将完全在实数集 $\mathbb{R}$ 中进行.

下述定理是我们的预期目标.

定理 3.3 设 $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个 (有理数的) 标准列. 那么实数 $\tilde{f}$ 是这个数列的极限，即

$$\tilde{f} = \lim_{n\to\infty} f(n).$$

证 设

$$f(n) = p + 0.a_1 \cdots a_n \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

先说明，按前面的规定，有理数 $f(n) = \widetilde{f(n)}$. 记 $\delta_n = \tilde{f} - f(n)$. 根据定义 3.2, 当 $n > 2$ 时

$$\tilde{f} - f(n) = 0.0 \cdots 0 a_{n+1} a_{n+2} \cdots\cdots.$$

于是根据例 2， $0 \le \delta_n \le 10^{-n}$. 于是我们断定

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0.$$

也就是说

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \tilde{f}. \ \square$$

与 §2 的 (2.9) 一样，对于一个标准列 $f = \{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$, 有如下估计式

$$\forall n \in \mathbb{N}_+ \quad f(n) \le \tilde{f} \le f(n) + \frac{1}{10^n}.$$

其中符号 $\forall$ 表示 “对于一切”.

根据这个不等式，我们对于无限小数完全可以象有限小数 (即以 0 为循环节的无限小数) 那样进行四则运算. 例如我们可以动笔算出

$$\sqrt{2}\pi = (1.414213\cdots)(3.141592\cdots) = 4.44288\cdots,$$
$$4 - \pi = 0.858407\cdots,$$
$$-\pi = -4 + 0.858407\cdots.$$

定理 3.4 $\mathbb{R}$ 是完备的，就是说， $\mathbb{R}$ 中的基本列一定收敛.

证 设 $f=\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的基本列. 把实数 $f(n)$ 写成十进小数

$$f(n)=m_n+0.a_1^n a_2^n a_3^n\cdots,\quad m_n\in\mathbb{Z},\ \ a_k^n\in\{0,1\cdots,9\},\ k\in\mathbb{N}_+.$$

令有理数

$$g(n)=m_n+0.a_1^n a_2^n a_3^n\cdots a_n^n,\quad n\in\mathbb{N}_+.$$

按定义 3.2 和定义 3.3,

$$0\le f(n)-g(n)<10^{-n}.$$

于是，有理数列 $g=\{g(n)\}_{n=1}^{\infty}$ 与数列 f 等价. 把与 g 等价的标准列记做 $h=\{h(n)\}_{n=1}^{\infty}$，把与 h 对等的实数记为 $\tilde{h}$. 根据定理 3.3

$$\lim_{n\to\infty}h(n)=\tilde{h}.$$

从而，与 h 等价的实数列 f 收敛到 $\tilde{h}\in\mathbb{R}$. □

根据定理 3.4 及 §1 的定理 1.1(我们再强调一下， §1 的内容，全部适用于实数列), 一个数列收敛的充分必要条件是它是基本列. 这就是在实数域中数列收敛的 Cauchy 准则 (我们使用了 “域” 这个代数学的术语，若暂不能接受就把它改成 “集” 字).

我们在中学课本中早就知道 “级数” 这个术语了. 那时我们遇到过等差级数和等比级数. 我们现在复习一下.

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个数列. 我们把表达式

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_n \qquad (S)$$

叫作 **级数**. 令

$$s_n=a_1+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}\quad n\in\mathbb{N}_+.$$

称 s_n 为级数 (S) 的第 n 部分和 (即前 n 项的和). 如果

$$\lim_{n\to\infty}s_n=s,$$

式中 s 或为实数，或为 ∞ 或为 $-\infty$, 我们就写

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_n=s.$$

其中，当 $s \in \mathbb{R}$ 时，说级数 (S) 收敛．根据数列收敛的 Cauchy 准则，级数 (S) 收敛的充分必要条件是，它的部分和数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是基本列，也就是说， $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N \in \mathbb{N}_+$ 使得当 $m > n \geq N$ 时

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_n \right| < \varepsilon.$$

其中符号 $\exists$ 代表 "存在相应的".

作为收敛级数的最简单的例子是公比的绝对值 (大于零) 小于 1 的等比级数，即当 $0 < |x| < 1$ 时

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

为了方便，我们规定，不管 x 是否为零，永远认为 $x^0 = 1$. 那么上面的等式对于 $x = 0$ 也成立.

定义 3.4 (实数的级数表示)　设实数 r 为十进小数

$$p + 0.a_1 a_2 a_3 \cdots.$$

那么根据定理 3.3, $\lim\limits_{n\to\infty} p + 0.a_1 \cdots a_n = r$. 记号

$$r = p + \sum_{k=1}^{\infty} a_k 10^{-k}$$

叫做 r 的十进级数表示.

现在可以说，我们对于开头提出的问题已做出了完满的回答，对于初中二年级学到的 "无限不循环小数" 终于有了透彻的理解. 我们所做的，好像只是逻辑上的自圆其说. 但在数学的发展史上，这个 "自圆其说" 被看作是 "数学分析的严密化" 的内容之一，是很费了一些数学家的脑筋的.