关于 Riemann 积分理论的本质缺陷及以 Lebesgue 积分理论取代之的看法 [*]

王　昆　扬
北京师范大学数学系 100875

为较完整地说明问题，先介绍“可数”的概念和 Riemann 积分的定义.

1. 可数集

众所周知，有限个元素组成的集合，它的元素是数 (shǔ) 得清的，当然应该叫作“可数集”. 同时，我们有办法一个一个地“清点”全体自然数所成的集合 $\mathbb{N}$. 只要从一开始，一个比一个多一地数 (shǔ) 下去，虽然永无休止，但却一个也不会漏掉. 因此，我们也把 $\mathbb{N}$ 叫作可数集. 把这种常识抽象成数学概念，得下述定义.

定义 1　可与 $\mathbb{N}$ 的一个子集作成一一对应的集合叫作 **可数集**, 空集也叫可数集.

显然，任何无限的可数集都可作成与 $\mathbb{N}$ 的一一对应. 因此，我们认为，它与 $\mathbb{N}$ 有同样多个元素.

定义 2　规定无限可数集所含的元素的数目为 $\aleph_0$, 读如“阿列夫零”.

若集合 A 有 $\aleph_0$ 个元，也就是说在 A 与 $\mathbb{N}$ 之间可建立一一对应，那么，把 A 中与自然数 n 对应的元记作 a_n(或 $a(n)$ 或 a^n 等等), 就可把 A 写成 $\{a_n:\ n\in\mathbb{N}\}$ 的形式.

以后，谈到可数个东西的时候，要么指的是有限个 (包括零个), 要么指的是 $\aleph_0$ 个.

例 1.　有理数的全体 $\mathbb{Q}$ 是可数集. 对于任意的 $n\in\mathbb{N}$ 我们把 n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中的每个坐标都是有理数的点叫作 **有理点**, 把有理点的全体记作 $\mathbb{Q}^n$, 它也是可数集.

例 2.　实数集 $\mathbb{R}$ 不是可数集.

证明.　　设不然. 那么，可把 $\mathbb{R}$ 写成 $\{r_n:\ n\in\mathbb{N}\}$.

令 $I_1=[0,1]$. 把 I_1 三等分成三个闭区间，其中至少有一个不含 r_1, 记这样的一个闭区间为 I_2, 它包含于 I_1, 且长度为 $\frac{1}{3}$. 把 I_2 三等分成三个闭区间，其中至少有一个不含 r_2, 记这样的一个闭区间为 I_3, 它包含于 I_2, 且长度为 $\frac{1}{3^2}$. 无限地继续这一步骤，得到 $\aleph_0$ 个闭区间，它们的全体记作 $\{I_n:\ n\in\mathbb{N}\}$. 那么，对于每个 $n\in\mathbb{N}$, $r_n\notin I_n$, $I_{n+1}\subset I_n$, 并且 I_n 的长度为 $\frac{1}{3^{n-1}}$. 由区间套定理知，存在实数 $r\in\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n$. 那么，$r$ 不可能属于 $\{r_n:\ n\in\mathbb{N}\}$. 荒谬.　□

2. Riemann 积分的定义

定义 3　设 $n\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{N}$, $k=(k_1,\cdots,k_n)\in\mathbb{Z}^n$. 称集合

$$Q_m(k)=\{x\in\mathbb{R}^n:\ 2^{-m}k_j\le x_j\le 2^{-m}(k_j+1),\ j=1,\cdots,n\}$$

为 $\mathbb{R}^n$ 中的第 m 级第 k 方块. 规定它的体积为 $|Q_m(k)|=2^{-mn}$(边长的 n 次幂).

定义 4　设 f 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 的非空有界集 D 上的实值函数. 令

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & \text{当 } x\in D\\ 0 & \text{当 } x\in\mathbb{R}^n\setminus D.\end{cases}$$

[0*] 教育部资助的教学改革研究项目，（略删节后）发表在“数学教育学报”， 8 (1999)No.3, 95—98

设 $m \in \mathbb{N}$. 令

$$\overline{S}_m(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \sup\{\tilde{f}(x):\ x \in Q_m(k)\}|Q_m(k)|, \quad \underline{S}_m(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \inf\{\tilde{f}(x):\ x \in Q_m(k)\}|Q_m(k)|.$$

分别称 $\overline{S}_m(f)$ 和 $\underline{S}_m(f)$ 为 f(在 D 上) 的第 m (Darboux) 上和与第 m(Darboux) 下和.

注 1.

(1) 定义 4 中的和 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}$ 实为有限和，因为只有有限个 $k \in \mathbb{Z}^n$ 使所加的数不是零.

(2) 如果 f 无上界，则 $\overline{S}_m(f) = \infty$, 如果 f 无下界，则 $\underline{S}_m(f) = -\infty$.

(3) $\forall m \in \mathbb{N}$, $\underline{S}_m(f) \le \underline{S}_{m+1}(f) \le \overline{S}_{m+1}(f) \le \overline{S}_m(f)$, $\underline{S}_m(f) < \infty$, $\overline{S}_m(f) > -\infty$.

定义 5 设 f 定义在 $\mathbb{R}^n$ 的有界集 D 上，分别称

$$\overline{I}(f) = \lim_{m\to\infty} \overline{S}_m(f) \quad 和 \quad \underline{I}(f) = \lim_{m\to\infty} \underline{S}_m(f)$$

为 f(在 D 上) 的上积分与下积分，如果 $\overline{I}(f) = \underline{I}(f) = I$, 则称 I 为 f(在 D 上) 的积分，记之为 $I = \int_D f(x)\,dx = \int_D f$. 当 $I \in \mathbb{R}$ 时，称 f 在 D 上可积. 把在有界集 D 上可积的函数的全体记作 $\Re(D)$.

注 2. 在定义 5 中，没有限定 f 有界，所以 $I = \infty$ 或 $-\infty$ 的情形可能发生。

从定义 5 知， f 在 D 上可积的必要条件是 f 在 D 有界. 用二进网格 $\{Q_m(k) : k \in \mathbb{Z}^n,\ m \in \mathbb{N}\}$ 处理涉及分划的问题，是近代实分析理论中的一个基本技巧. 我们借助这个网格来定义 Riemann 积分，与原始的定义是等价的，然而却使得叙述变得简洁.

定义 6 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 的有界集， $\chi_{_D}$ 表示 D 的特征函数，即

$$\chi_{_D}(x) = \begin{cases} 1 & 当 \quad x \in D, \\ 0 & 当 \quad x \notin D. \end{cases}$$

如果 $\chi_{_D} \in \Re(D)$ ，则称 D 为 Jordan 可测集，简称为可测集. 称 $\int_D \chi_{_D}$ 为 D 的测度，记之为 $|D|$.

对于无界集，我们如下规定它的可测性及测度. 设 $N \in \mathbb{N}, A_N = \{x \in \mathbb{R}^n :\ |x_j| \le N, j = 1, \cdots, n\}$ 若 $\forall N \in \mathbb{N}, E \cap A_N$ 可测，则说 E 可测，且定义 $|E| = \lim_{N\to\infty} |E \cap A_N|$.

注 3. 名称“ Jordan 可测集” 源于法国数学家 C.Jordan 在 1893 年发表的《分析教程》第二版中的“容度”一词.

例 3. $\mathbb{R}^n$ 中的单点集是可测集，且测度为零.

设 $D \subset \mathbb{R}^n$, $x \in D$. 若存在正数 r, 使得 $\{y \in \mathbb{R}^n :\ |x - y| < r\} \subset D$, 就把 x 叫作 D 的内点，把 D 的一切内点所成的集记作 $\mathring{D}$, 称之为 D 的内部. 使 $D = \mathring{D}$ 的集 D 叫作开集， (规定 $\emptyset = \mathring{\emptyset}$).

例 4. 设 $\mathbb{Q}^n$ 为 n 维有理点集，即 $\mathbb{Q}^n = \{x \in \mathbb{R}^n :\ x_j \in \mathbb{Q}, j = 1, \cdots, n\}$. 那么，对于 $\mathbb{R}^n$ 的任意的有界集 D, 只要 $\mathring{D} \ne \emptyset$, 集合 $\mathbb{Q}^n \cap D$ 就不是 Jordan 可测的。

事实上 $\mathring{D} \ne \emptyset$ 蕴含着，存在充分大的 $j \in \mathbb{N}$ 和适当的 $k \in \mathbb{Z}^n$, 使小方块 $Q := Q_j(k) \subset D$. 显然, $|Q| > 0$. 那么，记函数 $\chi_{_{\mathbb{Q}^n\cap D}} = f$ ，必有

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \overline{S}_m(f) \ge |Q| > 0, \quad \underline{S}_m(f) = 0.$$

故 f 不可积，即 $\mathbb{Q}^n \cap D$ 不可测.

3. Riemann 积分理论的本质缺陷是不承认 σ- 可加性

设 E_j, $(j\in\mathbb{N})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两两不相交的可数个可测集. 对于任意的 $m\in\mathbb{N}$, 令 $F_m=\bigcup_{j=1}^m E_j$. 由定义可知, F_m 是可测集, 且 $|F_m|=\sum_{j=1}^m |E_j|$. 更一般地, 有限个可积函数的和仍是可积函数, 且和函数的积分等于各被加函数的积分的和. 这种性质, 叫有限可加性.

如果代替 "有限个" 以 "$\aleph_0$" 个, 仍成立相应的结论, 那么相应的性质就叫作 "σ- **可加性**".

从例 3 和例 4, 我们已看到, Riemann 积分理论 (所涉及的 Jordan 测度) 不具有 "σ- 可加性". 下面我们做些进一步的分析.

例 5. 设 $\mathbb{Q}^n\bigcap[0,1]^n=\{r_j:\ j\in\mathbb{N}\}$, $\delta>0$. 定义

$$B_j(\delta)=\{x\in\mathbb{R}^n:\ |x-r_j|<2^{-j-1}\delta\},\quad G(\delta)=\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j(\delta).$$

那么, $G(\delta)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开集, 它一定可以表示成彼此互不重迭 (但可能相交) 的 $\aleph_0$ 个 (如定义 3 所说的) 方块的并. 我们说, 当 $\delta<1$ 时, $G(\delta)$ 不可测.

证明. 记 $f=\chi_{G(\delta)}$. 对于每个 $m\in\mathbb{N}$, 定义

$$I_m=\{k\in\mathbb{Z}^n:\ Q_m(k)\subset G(\delta)\},\quad J_m=\{k\in\mathbb{Z}^n:\ Q_m(k)\bigcap G(\delta)\neq\emptyset\}.$$

显然, I_m 是有限集. 若 $k\in I_m$, 即 $Q_m(k)\subset G(\delta)$, 则由有限复盖定理知, 存在 $N(k)\in\mathbb{N}$ 使 $Q_m(k)\subset\bigcup_{j=1}^{N(k)}B_j(\delta)$. 令 $M=\max\{N(k):\ k\in I_m\}$. 那么 $\sum_{k\in I_m}|Q_m(k)|\le\sum_{j=1}^{M}|B_j(\delta)|\le\sum_{j=1}^{M}(2^{-j}\delta)^n$. 由此推出 $\underline{S}_m(f)=\sum_{k\in I_m}|Q_m(k)|\le\delta^n$. 另一方面, 由 $\bigcup_{k\in J_m}Q_m(k)\supset(0,1)^n$ 知 $\overline{S}_m(f)\ge\sum_{k\in J_m}|Q_m(k)|\ge 1$. 那么, 根据定义 5, 当 $\delta<1$ 时有界开集 $G(\delta)$ 不是 Jordan 可测集. $\square$

下面我们把例 5 所说的话翻译成积分的语言.

例 6. 设 G 是例 5 所说的相应于 $\delta=0.4$ 的有界开集. 把它表示成 $\aleph_0$ 个互不重迭的方块的并: $G=\bigcup_{j=1}^{\infty}Q_j$. 令

$$E_1=Q_1,\ E_{j+1}=Q_{j+1}\setminus\Big(\bigcup_{i=1}^{j}Q_i\Big),\quad j\in\mathbb{N}.$$

那么, 诸 E_j 可测且两两不交, $|E_j|=|Q_j|$. 而且 $G=\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j$. 定义 $f_j=\chi_{E_j}$, $j\in\mathbb{N}$. 那么,

$$\forall j\in\mathbb{N},\qquad f_j\in\Re(G)\qquad\int_G f_j(x)\,dx=|E_j|.$$

但是, $\chi_G=\sum_{j=1}^{\infty}f_j\notin\Re(G)$.

我们想一想, 集合的测度规定的是它的大小尺寸. 有限个彼此互不相交的有测度的集合合起来是有大小的, 它的大小就是这些集的测度的总和. 这合乎我们的常识, 反映了客观规律. 当我们对客观世界的认识从 "有限" 发展到 "$\aleph_0$" 之后, 是不是应该承认 $\aleph_0$ 个彼此互不相交的有测度的集合合起来是有大小的, 它的大小就是这些集的测度的总和呢? 也就是说, 我们的认识是不是也应该从 "有限可加性" 这个初等水平发展到 "σ- 可加性" 的水平呢?

在这个问题上 Riemann 的理论是停留在初等水平的, 它不承认测度的 σ- 可加性, 这是它的本质缺陷.

4. 创造条件, 逐步以 Lebesgue 积分取代 Riemann 积分

二十世纪初由法国数学家 H.L.Lebesgue 建立起来的积分理论，克服了 Riemann 积分理论的缺陷，恰恰以承认 σ- 可加性为其出发点．正如 M. 克莱因 [1](第四册， 123 页) 所说：

“Cantor 曾证明，直线上的任一开集 U 必是一族可数个两两不相交的开区间的并集． Borel 利用 Cantor 的结果，不再用有穷个区间包围 U 去逼近 U 的方法，而是提出把一个有界开集的各个构成区间的长度的总和，作为这个开集的测度．”

同样的思想也适用于 $\mathbb{R}^n$．容易证明， $\mathbb{R}^n$ 中的非空开集 G 必是 $\aleph_0$ 个形如 $Q_m(k)$ 的两两不相重迭 (即无公共内点) 的二进方块的并．把这些方块的体积之和作为 G 的测度，是非常自然的事．这正是 Lebesgue 理论的出发点． Lebesgue 就是如此在他的老师 Borel 及其他前辈工作的基础上建立起他的理论的．

因此，上面例 4, 例 5, 例 6 中发生的问题，在 Lebesgue 积分理论中是不存在的，例 4 和例 5 的毛病被 Lebesgue 测度的定义克服掉了．而例 6 的问题被从定义 (σ 可加性) 导出的单调收敛定理 (即以意大利人 B.Levi 的名字命名的定理) 轻而易举地解决了．

我们愿意再举个例，说明 Lebesgue 积分理论基于 σ 可加性所表现的巨大优越性．这是 [2] 第 57 页的习题 25 的一部分．

例 7． 设 $f(x)=\begin{cases} x^{-\frac{1}{2}} & \text{当}\quad 0<x<1, \\ 0. & \text{当}\quad x\notin(0,1). \end{cases}$ 把 $\mathbb{Q}$ 排成数列 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$. 定义

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}f(x-r_n).$$

那么， g 在 $\mathbb{R}$ 的认何有内点的区间上都是无界的．显然， Riemann 积分 (即使是瑕积分) 无法处理 g. 可是按 Lebesgue 积分的控制收敛定理 (它也是 σ 可加性的结果),

$$\int_{\mathbb{R}}g(x)\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-n}\int_{\mathbb{R}}f(x-r_n)\,dx=2.$$

Lebesgue 积分理论的重要性和优越性现已举世公认．以至于法国著名数学教育家 J.Dieudonné 说 ([3],159 页):

“$\cdots$ 这里明显地没有微积分教程中一个古老的题目．即‘黎曼积分’. 人们大概会感觉到：如果不是它的有权威的名字，它老早就该没落下去了，因为对于任何一位从事研究工作的数学家来说 (带着对黎曼天才的应有尊敬), 十分清楚，现今这一‘理论’的重要性在测度与积分的一般理论中，最多不过是一普通的有趣的练习 (参看 13.9 问题 7). 只有那种学究传统的顽固保守主义才会把它冻结成课程的正规部分，长时间以后必将失去它的历史重要性．”

我理解这段话有两个意思．第一个意思是，按照科学发展的客观规律， Lebesgue积分取代 Riemann积分是理所当然的；第二个意思是说 Lebesgue积分目前尚未取代 Riemann积分原因有二：其一是由于或许 Riemann 比 Lebesgue 在人们心中更伟大，其二是 **学究传统的顽固保守主义的束缚**. 我认为传统的束缚 (把那些伤人的定语去掉) 是最糟糕的．我们的改革，恰恰就是要打破那些落后于时代的传统的束缚．事实上这也是最难的．

我们现行的课程体系中， Riemann积分在一、二年级讲，讲得很细，算得很多；而 Lebesgue积分在三年级讲， 72 学时，讲得糙，算得少，甚至根本不算 (因为在 Riemann积分中算多了). 使教师和学生在心理上潜在地形成 Riemann积分比 Lebesgue积分更重要或更基本的印象．这不能不说是一个违背科学发展规律的错误．其结果，不仅是学生，就是教师，对于 Lebesgue积分的理解都是马马虎虎的．如今现实的局面是，许多数学系的教师只懂 Riemann积分而不懂 (或不真正懂)Lebesgue积分．虽然时

有“新三高”的提法 (把“实变函数论”等三门课的地位提高的提法), 但实际上，只要 Riemann积分不让位， Lebesgue积分就不可能被摆在数学系基础课的地位.

Riemann积分不让位的一个现实的原因是，以往的 Lebesgue积分被讲得太难. 从“有限可加”到 σ 可加，人们的认识要从“有限”提高到 $\aleph_0$. 困难是不可避免的. 教师的职责应是把难的东西经过自己反复的思考消化，尽可能化解得易为学生接受，而不该是躲避困难，固步自封.

用 Lebesgue积分取代 Riemann积分，对于数学系一、二年级的学生是否可行？

我认为，重要的问题是怎样教. 如果能循序渐进，因材实教，不要求每个学生都得 90 分，那就没什么行不通. 倒是我们的教师必须先提高自己.

关于 Lebesgue积分比 Riemann积分难多少， S.Saks 在 60 多年前阐述 Lebesgue积分的定义时说过 (转译自 [4], 第 2,3 页):

“此外， Lebesgue的方法不仅更为一般，而且从某种观点来说，它比 Riemann-Darboux 的方法更为简单. 因为它不同时引入上积分和下积分这样两个作为极值的积分.”

我国有些学者，例如匡继昌教授 [5] 等，早就提出过用 Lebesgue积分取代 Riemann积分的问题，有的已打算开始实施试验. 我愿加入这个向传统的束缚挑战的行列，为推进数学教育的发展而不遗余力.

参 考 文 献

[1] M. 克莱因， 古今数学思想， (北京大学数学系数学史翻译组译) 上海科学技术出版社， 1981.

[2] G.B.Folland, Real Analysis, John Wiley and Sons, New York, 1984

[3] J. 迪厄多内， 现代分析基础 第一卷， 科学出版社， 1982.

[4] S.Saks, Theory of the Integral (English translation by L.C.Young), Hafner Publish Company, New York, 1937.

[5] 匡继昌， 寻求数学分析改革突破口的思考与实践， 数学教育学报， 1997 年第 2 期.