谈指数函数的定义 [1]

—— 在大学数学分析课中妥善定义指数函数

王昆扬（北京市师范大学） 张培恒（青岛大学）

对于如何定义指数函数，我们提出下述看法，与同事们商讨。

§1. 承袭前人的结果，不必重复对事物的认识过程

在数学发展的历史上，对于对数函数的研究比对指数函数的研究来得还早，这似乎是不合逻辑的反常现象，但却是事实。

十六世纪，当人们对于指数概念的了解还不很完全的时候，由于天文学和航海事业的需要，英国数学家 J.Napier(1550-1617) 使用三角公式，花了约 20 年时间，制作了精密的对数表。于 1614 年出版了《 Mirifici Logarithmorum Canonic Description 》（《奇妙的对数定律说明书》）(参阅 [1])一书。他的工作不涉及指数函数的概念，当时关于非正整数指数的概念还是模糊的。另一位英国数学家和天文学家 H.Briggs(1561-1630) 是 Napier 的追随者和合作者，继承 Napier 未竟的事业。他们于 1624 年合作出版了《 Arithmetica Logarithmica 》（《对数算术》）一书。为了纪念 Briggs ，以 10 为底的对数（常用对数）常被称为 Briggs 对数。在他们那个年代无理数 e 尚未被发现。

第一个明确地阐明对数是幂运算的逆运算的是大数学家 L.Euler(生于瑞士， 1707- 1783) 。自然对数的底也是他发现的，并以他的名字的首字母的小写形式 e 来表示。英格兰数学家 B.Taylor(1685-1731) 于 1715 年提出函数的级数表示公式，在这个公式下， e^x 的值将由 x 代入下面的级数中而得到：

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{1}$$

如今我们怎样向学生讲授对数概念呢？恐怕没有人会从 Napier 和 Briggs 的著作《 Arithmetica Logarithmica 》讲起。我们都不会重复历史上前人走过的路，而是直截了当地先讲指数，再作为其逆运算引入对数。

§2. 现在流行的教科书中，对指数函数定义的讲法之缺点

上一段的历史事实说明，我们在承袭前人对于指数、对数的研究结果时，没有重复前人走过的老路，而是走了一个 “捷径”。但是在怎样向学生讲授指数函数这个问题上，现行的教科书中的讲法却是保守的。我们来看指数函数

$$f(x) = a^x \ (a > 0) \ x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

通常是怎样定义的。先考虑 x 取自然数的情形，那么 $f(x)$ 是 x 个 a 连乘之积，这时 $f(x)$ 叫做 a 的 x 次幂。其次考虑 x 取自然数的倒数 $x = \frac{1}{n}(n \in N)$ 的情形，这时把 $f(x)$ 规定为一个其 $n(= \frac{1}{x})$ 次幂为 a 的正数，并把它叫做是 a 的 n 次方根。进一步 $f(x)$ 的定义可推广到 x 为有理数的情形。注意，这里暗藏着一个正数的 n 次方根存在的问题。试问，在定义之初，一个正数一定有 n 次方根这件事是不是容易说得清楚？定义了 $n(n \in N)$ 次方根之后，接着，考虑 x 是正分数 $\frac{n}{m}(m, n \in N)$ 的情形。 $a^{\frac{n}{m}}$ 被定义为 $(a^{\frac{1}{m}})^n$ 。其后对于 x 是有理数的情形，给出 $f(x)$ 的定义。最后，如何过渡到 x 是无理数的情形呢？是不是要通过 x 作为有理数列的极限来过渡呢？这样的过渡是很干净利索的吗？这样定义的指数函数其连续性是不是已蕴含于定义本身了呢？处理诸如此类逻辑上的细节是很省事的吗？

这样一个定义指数函数的思想过程，所涉及到的指数函数的基本性质（或特征）乃是

$$a^x a^y = a^{x+y} \ a > 0 \ x, y \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

[1]教育部资助的教学改革研究项目，发表在 “高等数学研究”,2001 年第三期 13 、 14 、 28 页

关于这个算律，中学生已经记得清清楚楚了，就像他们已经清清楚楚记得勾股定理一样。

那么，这样一个定义指数函数的方法，使学生从中学的认识水平提高到怎样的程度呢？

我们认为这样讲授指数函数至少有三个缺点。

1）细节麻烦，逻辑不清，叙述罗嗦。如上所述，正数的方根的存在性，只能承认，说不清楚。正数（当然可以是无理数）的“无理数次幂”也不是三言两语说得明白的。

2）与第一个缺点相关联，在讨论指数函数的连续性时发生逻辑错误。

3）按上述方法恐怕很难，甚至不可能把指数函数的定义域扩充到复平面上的。也就是说，对于虚数 $i(i^2=-1), f(i)=a^i$ 的定义恐怕只能重新规定。

上述第 2）个缺点，已在有些教科书中表现出来。在这些书中，如上“定义”了指数函数之后，随之“证明”指数函数是严格单调的，然后定义它的反函数 $\log_a$ 。当证明 $f(x)=a^x$ $(a>0)$ 在 $x=0$ 处的连续性时，论述如下：

$\forall\ \varepsilon>0$ ，要使 $|f(x)-f(0)|<\varepsilon$ ，只需

$$1-\varepsilon=f(0)-\varepsilon<f(x)<f(0)+\varepsilon=1+\varepsilon$$

此式等价于 x 介于 $f^{-1}(1-\varepsilon)=\log_a(1-\varepsilon)$ 和 $f^{-1}(1+\varepsilon)=\log_a(1+\varepsilon)$ 之间。于是取 $\delta=\min\{|log_a(1+\varepsilon)|,|log_a(1-\varepsilon)|\}$ 就保证当 $|x|<\delta$ 时， $|f(x)-f(0)|<\varepsilon$ 。

请问：这是证明吗？它的根据是什么？能说这不是逻辑错误吗？

顺便说一说，在多数通用的教材中都在显要的地位上叙述“两个重要的极限”，其中之一就是数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限，并把这个极限为数 e 的定义。这种做法具有很长的历史，是有些背景的。而证明这个数列收敛，大多是考虑它的单调有界性。如果引伸一下，进一步考虑数列 $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}$ ，其中 x 是复数，譬如说 $x=i,(i^2=-1)$, 那么前述考察单调有界的方法就不可用了。因此，我们认为这个所谓的“重要的极限”不宜作为定义指数函数的前导方式，而只宜作为一个习题。

§3. 对引入指数函数定义的建议

把公式 (1) 作为指数函数 e^z 的定义，即定义

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{n!}z^n \quad z\in C$$

那么 $f(1)=e$ ，并记 $f(z)=e^z$ 。在复变函数论的课程中（例如 [2] ）就是这样做的。然后非常简便地（利用数列极限的理论）得到 $f(x+y)=f(x)f(y)$（参阅 [3] ）以及 f 的连续性。当 $x\in\mathbb{R}$ 时， f 在 $\mathbb{R}$ 上的严格增加性质是明显的，它的反函数，记为 $f^{-1}=\log$ 进而对于任意的 $a>0$ ，定义以 a 为底的指数函数 $a^x=f(x\log a)=e^{x\log a}$ 及其反函数。

这个定义十分简明扼要，一扫 §2 中所述的诸项缺点，能把学生的认识水平真正从中学时代的知其然而上升到大学时代的知其所以然。

参考文献

[1] 梁宗巨，《世界数学史简编》，沈阳，辽宁人民出版社， 1980 年第一版， 157 页

[2] [苏] И．И．普里瓦诺夫，《复变函数引论》，北京大学数学力学系分析教研组译，上海，商务印书馆， 1953 年初版，第二章 § 4,-7, 上册， 78 页.

[3] 王昆扬，《简明数学分析》，北京，高等教育出版社， 2001 年 7 月第一版，第一章 § 6, 37 页.