

# Taylor 公式

设  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$ . 设  $f: I := B(x_0, r) \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $n \in \mathbb{N}_+$ . 设  $f$  在  $I$  上处处有  $n$  阶导数. 定义  $f$  在点  $x_0$  处的  $n$  次 Taylor 多项式为

$$T_n(f)(x, x_0) := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k, \quad x \in \mathbb{R}.$$

并称

$$R_n(f)(x, x_0) := f(x) - T_n(f)(x, x_0) = \alpha_n(f)(x, x_0)(x - x_0)^n \quad (x \in I)$$

为  $f$  在  $x_0$  处的  $n$  阶 Taylor 余项, 其中

$$\alpha_n(f)(x, x_0) := R_n(f)(x, x_0)(x - x_0)^{-n}, \quad 0 < |x - x_0| < r, \quad \alpha_n(f)(x_0, x_0) = 0.$$

我们的结论是

(A) 如果  $f^{(n)}$  在  $x_0$  处连续, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_n(f)(x, x_0) = 0$$

(B) 如果  $f^{(n)}$  在  $x_0$  处可导, 则

$$\limsup_{x_0 \neq x \rightarrow x_0} |\alpha_n(f)(x, x_0)(x - x_0)^{-1}| \leq \frac{1}{n!} |f^{(n+1)}(x_0)|.$$

(C) 如果  $f^{(n)}$  在  $I$  上可导, 则对于  $x \in I$ , 存在介于  $x_0$  和  $x$  之间的  $\xi$  使得

$$\alpha_n(f)(x, x_0) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0), \quad x \in I.$$

对于固定的  $x_0$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$ , 简写

$$T(x) := T_n(f)(x + x_0, x_0), \quad R(x) := R_n(f)(x + x_0, x_0), \quad \alpha(x) := \alpha_n(f)(x + x_0, x_0).$$

**证明** 易见

$$R(0) = R'(0) = \cdots = R^{(n)}(0) = 0.$$

设  $x \in I$ ,  $x \neq x_0$ .

(A) 使用 Lagrange 中值公式  $n$  次, 得

$$R(x) = R(x) - R(0) = R'(x_1)x = (R'(x_1) - R'(0))x = R''(x_2)x_1x \cdots = R^{(n)}(x_n)x_{n-1} \cdots x_1x,$$

其中  $x_1$  严格在 0 和  $x$  之间,  $\cdots$ ,  $x_n$  严格在 0 和  $x_{n-1}$  之间. 于是

$$\alpha(x) = (R^{(n)}(x_n) - R^{(n)}(0)) \frac{x_{n-1} \cdots x_1 x}{x^n}. \quad (1)$$

那么  $|\alpha(x)| \leq |R^{(n)}(x_n) - R^{(n)}(0)|$ . 根据条件,  $R^{(n)}$  在  $x = 0$  处连续, 而当  $0 \neq x \rightarrow 0$  时,  $0 \neq x_n \rightarrow 0$ , 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = 0, \quad \text{即} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_n(f)(x, x_0) = 0.$$

下面固定  $x$ ,  $0 < |x| < r$ , 定义  $h(t) := R(tx)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . 那么  $h^{(k)}(t) = R^{(k)}(tx)x^k$ ,  $k = 1, \cdots, n$ ,

$$h(0) = h'(0) = \cdots = h^{(n)}(0) = 0.$$

(B) 定义

$$\delta(t) := h(t) - h(1)t^n, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (2)$$

那么

$$\delta(0) = h(0) = 0, \quad \delta^{(k)}(0) = h^{(k)}(0) = 0, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

根据 (2), 我们有

$$\delta^{(n)}(t) = h^{(n)}(t) - n!h(1). \quad (3)$$

注意到  $\delta(1) = 0 = \delta(0)$ , 用 Rolle 定理, 知有

$$t_1 \in (0, 1) \text{ 使得 } \delta'(t_1) = 0 = \delta'(0).$$

再用 Rolle 定理, 知有

$$t_2 \in (0, t_1) \text{ 使得 } \delta''(t_2) = 0 = \delta''(0).$$

依此类推, 直到第  $n$  次取得

$$t_n \in (0, t_{n-1}) \text{ 使得 } \delta^{(n)}(t_n) = 0.$$

根据 (3), 这意味着

$$R(x) = \frac{1}{n!}R^{(n)}(t_n x)x^n = \frac{1}{n!}R^{(n)}(t_n x)x^n.$$

于是

$$\frac{\alpha_n(f)(x, x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{n!} \frac{R^{(n)}(t_n(x - x_0))}{x - x_0} = \frac{1}{n!} \frac{f^{(n)}(t_n(x - x_0) + x_0) - f^{(n)}(x_0)}{x - x_0}.$$

从而

$$\left| \frac{\alpha_n(f)(x, x_0)}{x - x_0} \right| \leq \frac{1}{n!} \left| \frac{f^{(n)}(t_n(x - x_0) + x_0) - f^{(n)}(x_0)}{t_n(x - x_0)} \right|,$$

(其中  $t_n \in (0, 1)$  与  $x$  有关). 由于假定  $f^{(n)}$  在  $x_0$  可导, 我们得到

$$\limsup_{x_0 \neq x \rightarrow x_0} \left| \frac{\alpha_n(f)(x, x_0)}{x - x_0} \right| \leq \frac{1}{n!} |f^{(n+1)}(x_0)|.$$

(C) 定义

$$\gamma(t) := h(t) - h(1)t^{n+1}, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (4)$$

由于  $f^{(n)}$  在  $I$  上可导, 我们可以像在 (2) 使用 Rolle 定理  $n+1$  次, 知有

$$t_{n+1} \in (0, t_n) \text{ 使得 } \gamma^{(n+1)}(t_{n+1}) = 0.$$

由此得到

$$h(1) = \frac{1}{(n+1)!} R^{(n+1)}(t_{n+1}x)x^{n+1}.$$

注意到

$$R^{(n+1)}(y) = R^{(n+1)}(f)(y + x_0, x_0) = f^{(n+1)}(y + x_0)$$

我们求得

$$R(x) = \frac{1}{(n+1)!} R^{(n+1)}(t_{n+1}x)x^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t_{n+1}x + x_0)x^{n+1}.$$

记  $\xi = t_{n+1}x + x_0$ , 它严格介于  $x_0$  和  $x_0 + x$  之间 (只要  $x \neq 0$ ). 上面的结果是

$$\alpha_n(f)(x, x_0) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0). \quad \square$$