

马祖强给出的部分习题解答

2007年11月公布

习题 1.1

5.证明 若 $x = y$, 则 $\max(x, y) = x$, 令

$$z_n = \begin{cases} x_n, & \text{当 } n = 2k - 1 \text{ 时,} \\ y_n, & \text{当 } n = 2k \text{ 时.} \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = x$, 而 $\max\{x_n, y_n\}$ 是 $\{z_n\}$ 的子列, 由定理 1.2 知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \max(x_n, y_n) = x$.

若 $x \neq y$, 不妨设 $x > y$. 则 $\exists N \in \mathbb{N}_+$, s.t. 当 $n > N$ 时, 有 $x_n > y_n$. 于是

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \max(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x.$$

7.证明 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = f$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = g$. 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}_+$, s.t. 当 $n > N_1$ 时, 有

$$f - \varepsilon < f(n),$$

当 $n > N_2$ 时, 有

$$g(n) < g + \varepsilon.$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$f - \varepsilon < f(n) \leq g(n) < g + \varepsilon,$$

由此得 $f < g + 2\varepsilon$. 再由 ε 的任意性即得 $f \leq g$, 即

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} g(n).$$

习题 1.3

2.证明 令 $f_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$, 利用平均值不等式

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \quad (a_k \geq 0, k = 1, 2, \cdots, n)$$

得到

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 1 \leq \left(\frac{n(1 + \frac{1}{n}) + 1}{n+1}\right)^{n+1} = e_{n+1},$$

和

$$\frac{1}{f_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \cdot 1 \leq \left(\frac{(n+1)\frac{n}{n+1} + 1}{n+2}\right)^{n+2} = \frac{1}{f_{n+1}}.$$

这表示 $\{e_n\}$ 单调增加, 而 $\{f_n\}$ 单调减少. 又由于

$$2 = e_1 \leq e_n < f_n \leq f_1 = 4,$$

由单调有界定理知数列 $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛.

令

$$g_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

则当 $n > 2$ 时,

$$g_n - e_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right).$$

注意到当 $k \geq 2$ 时

$$0 < 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \leq \frac{1 + \cdots + (k-1)}{n} = \frac{k(k-1)}{2n},$$

得

$$|g_n - e_n| \leq \frac{1}{2n} \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-2)!} = \frac{1}{2n} g_{n-2}.$$

从而

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e_n.$$

5.(3)证明 因为

$$(n!)^2 = (n \cdot 1)[(n-1) \cdot 2][(n-2) \cdot 3] \cdots (1 \cdot n) \geq n^n,$$

故

$$\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n}.$$

从而 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = [\frac{1}{\varepsilon^2}]$, s.t. 当 $n > N$ 时, 有

$$|\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}| < \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

(4) 证明: 因 $n > 1$ 时, $\sqrt[n]{n} > 1$. 设 $\sqrt[n]{n} = 1 + a_n, (a_n > 0)$, 则有

$$n = (1 + a_n)^n = 1 + na_n + \frac{n(n-1)}{2}a_n^2 + \cdots + a_n^n > 1 + \frac{n(n-1)}{2}a_n^2,$$

即得到

$$|\sqrt[n]{n} - 1| = |a_n| < \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

于是 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = [\frac{2}{\varepsilon^2}]$, s.t. 当 $n > N$ 时, 有

$$|\sqrt[n]{n} - 1| < \sqrt{\frac{2}{n}} < \varepsilon.$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

6. 证明 由 $a_1 = \sqrt{a} > 0$ 知 $a_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a_1 + a} = a_2$. 设 $a_k < a_{k+1}$, 即 $a_k < \sqrt{a_k + a}$, 则 $a_k + a < \sqrt{a_k + a} + a = a_{k+1} + a$, 从而 $\sqrt{a_k + a} < \sqrt{a_{k+1} + a}$, 即 $a_{k+1} < a_{k+2}$. 由数学归纳法知, 对任意的自然数 n 有, $a_n < a_{n+1}$, 即 $\{a_n\}$ 递增.

又当 $a > 0$ 时, $a_1 = \sqrt{a} < 1 + a$. 设 $a_k < 1 + a$, 则 $a_{k+1} = \sqrt{a_k + a} < \sqrt{1 + a + a} < \sqrt{1 + 2a + a^2} = 1 + a$. 故由数学归纳法知 $\{a_n\}$ 有上界 $1 + a$.

综上, 由单调有界定理知 $\{a_n\}$ 极限存在, 设其为 α . 对 $a_{n+1}^2 = a_n + a$ 两端令 $n \rightarrow +\infty$ 取极限, 得

$$\alpha^2 = \alpha + a,$$

解得

$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$

由于 $a_n > 0$, 所以 $\alpha > 0$. 故

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$

9.证明 由题设知对所有的 n 有 $a_n > 0, b_n > 0$, 故

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \geq \sqrt{a_n b_n} = b_{n+1},$$

从而

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{a_n + a_n}{2} = a_n, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{b_n b_n} = b_n,$$

且

$$a_n \geq b_n \geq b_1 = b, b_n \leq a_n \leq a_1 = a.$$

即 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均为单调有界数列, 故极限均存在. 设

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A, \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = B,$$

对 $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ 两端令 $n \rightarrow +\infty$ 取极限, 得 $A = \frac{A+B}{2}$. 故 $A = B$, 即

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

习题 1.4

习题 2.(6) 若 $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = a \in \mathbb{R}$, 则

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} (a_k + b_k) = a + \limsup_{k \rightarrow +\infty} b_k, \quad \liminf_{k \rightarrow +\infty} (a_k + b_k) = a + \liminf_{k \rightarrow +\infty} b_k.$$

证明 由题意知: $\limsup_{k \rightarrow +\infty} a_k = a = \liminf_{k \rightarrow +\infty} a_k$,

由 (4) 可得: $\limsup_{k \rightarrow +\infty} (a_k + b_k) \leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} a_k + \limsup_{k \rightarrow +\infty} b_k = a + \limsup_{k \rightarrow +\infty} b_k$.

下证 $\limsup_{k \rightarrow +\infty} (a_k + b_k) \geq \liminf_{k \rightarrow +\infty} a_k + \limsup_{k \rightarrow +\infty} b_k$.

设 $\liminf_{k \rightarrow +\infty} a_k = A$, $\limsup_{k \rightarrow +\infty} b_k = B \in \mathbb{R}$. 对任意的 $\varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, 当 $k \geq N$ 时有:

$$\inf_k a_k > A - \varepsilon, \quad \sup_k b_k < B + \varepsilon,$$

所以对任意的 $k > N$, $a_k > A - \varepsilon$, 故

$$a_k + b_k > A - \varepsilon + b_k,$$

$$\sup_k (a_k + b_k) \geq \sup_k (A - \varepsilon + b_k) = \sup_k b_k + A - \varepsilon$$

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} (a_k + b_k) \geq \limsup_{k \rightarrow +\infty} b_k + A - \varepsilon$$

由于 ε 任意, 所以

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} (a_k + b_k) \geq \liminf_{k \rightarrow +\infty} a_k + \limsup_{k \rightarrow +\infty} b_k = a + \limsup_{k \rightarrow +\infty} b_k,$$

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} (a_k + b_k) = a + \limsup_{k \rightarrow +\infty} b_k.$$

当 $\limsup_{k \rightarrow +\infty} b_k = +\infty$ 或 $-\infty$ 时, 证明不难, 此处略去。

完全类似的可以证明 $\liminf_{k \rightarrow +\infty} (a_k + b_k) \leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} a_k + \liminf_{k \rightarrow +\infty} b_k$

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} (a_k + b_k) = a + \liminf_{k \rightarrow +\infty} b_k. \quad \square$$

(7) 若 $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = a \in (0, +\infty)$, 则

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} (a_k b_k) = a \limsup_{k \rightarrow +\infty} b_k, \quad \liminf_{k \rightarrow +\infty} (a_k b_k) = a \liminf_{k \rightarrow +\infty} b_k.$$

证明 只证明第一个等式。

1). $\forall k \in \mathbb{N}_+, b_k \geq 0$ 时, 类似于 (6), 先证

$$(\liminf_{k \rightarrow +\infty} a_k)(\limsup_{k \rightarrow +\infty} b_k) \leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} (a_k b_k) \leq (\limsup_{k \rightarrow +\infty} a_k)(\limsup_{k \rightarrow +\infty} b_k).$$

2). 若 $\limsup_{k \rightarrow +\infty} b_k > 0$, 则 $\{b_k\}$ 中有无穷多项大于 0, 作新数列:

$$b_k^+ = \max\{b_k, 0\} = \begin{cases} b_k, & \text{当 } b_k > 0 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } b_k \leq 0 \text{ 时} \end{cases}$$

则 $b_k^+ \geq 0$, 且 $\limsup_{k \rightarrow +\infty} b_k = \limsup_{k \rightarrow +\infty} b_k^+$. 对 $\{a_k\}, \{b_k^+\}$ 用 1) 中的结论, 有

$$(\liminf_{k \rightarrow +\infty} a_k)(\limsup_{k \rightarrow +\infty} b_k^+) \leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} (a_k b_k^+) \leq (\limsup_{k \rightarrow +\infty} a_k)(\limsup_{k \rightarrow +\infty} b_k^+).$$

所以 $\limsup_{k \rightarrow +\infty} (a_k b_k^+) = a \limsup_{k \rightarrow +\infty} b_k^+ = a \limsup_{k \rightarrow +\infty} b_k$,

但 $\limsup_{k \rightarrow +\infty} (a_k b_k^+) = \limsup_{k \rightarrow +\infty} (a_k b_k)^+ = \limsup_{k \rightarrow +\infty} (a_k b_k)$. (因充分大的 k , 有 $a_k > 0$)

所以 $\limsup_{k \rightarrow +\infty} (a_k b_k) = a \limsup_{k \rightarrow +\infty} b_k$.

3). 若 $-\infty < \limsup_{k \rightarrow +\infty} b_k \leq 0$, 则可取充分大的 $c > 0$, 使得 $\limsup_{k \rightarrow +\infty} (b_k + c) > 0$, 再用 1), 2) 中的结果即可。

4). 若 $\limsup_{k \rightarrow +\infty} b_k = -\infty$, 等式显然成立。

对第二个等式可完全类似的证明。 \square

(8) 若 $\forall k \in \mathbb{N}_+, a_k > 0$, 且 $\liminf_{k \rightarrow +\infty} a_k \in (0, +\infty)$, 则

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_k} = (\liminf_{k \rightarrow +\infty} a_k)^{-1}$$

证明 由 (7) 中的不等式, 得

$$1 = \liminf_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a_k} \cdot a_k \right) \leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_k} \liminf_{k \rightarrow +\infty} a_k \leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a_k} \cdot a_k \right) = 1. \quad \square$$

习题 5 设有正数列 $\{a(k)\}_{k=1}^{+\infty}$, 证明

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{a(k)} \leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{a(k+1)}{a(k)}; \quad \liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{a(k+1)}{a(k)} \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{a(k)}.$$

证明 只证明第一个等式。

$$\text{设 } \limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{a(k+1)}{a(k)} = A, \quad (1)$$

若 $A = +\infty$, 不等式显然成立, 下设 $0 \leq A < +\infty$. 由 (1), $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $i > N$ 时,

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} < A + \varepsilon.$$

任取 $n > N$, 上式中令 $i = N, N+1, \dots, n-2, n-1$, 将这 $n-N$ 个不等式相乘, 得

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \dots \frac{a_n}{a_{n-1}} < (A + \varepsilon)^{n-N},$$

所以

$$a_n < a_N (A + \varepsilon)^{-N} \cdot (A + \varepsilon)^n, \text{ 即 } \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{a_N (A + \varepsilon)^{-N}} (A + \varepsilon).$$

令 $n \rightarrow +\infty$, 并取上极限得 $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_N (A + \varepsilon)^{-N}} (A + \varepsilon) = A + \varepsilon$, 由 ε 的任意性, 不等式得证. \square

习题 5 设 $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = 0, \forall k \in \mathbb{N}_+, y_k > y_{k+1} > 0$.

求证: 若 $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_k - x_{k+1}}{y_k - y_{k+1}} = l \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$, 则

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_k}{y_k} = l$$

证明 只证 $l \in \mathbb{R}$ 的情形, 由题意知 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, $l - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} < l + \frac{\varepsilon}{2}$, 因 $y_k > y_{k+1} > 0$, 所以 $(l - \frac{\varepsilon}{2})(y_n - y_{n+1}) < x_n - x_{n+1} < (l + \frac{\varepsilon}{2})(y_n - y_{n+1})$.

对任意 $m, n > m > N$, 有

$$(l - \frac{\varepsilon}{2})(y_n - y_{n+1}) < x_n - x_{n+1} < (l + \frac{\varepsilon}{2})(y_n - y_{n+1}),$$

$$(l - \frac{\varepsilon}{2})(y_{n-1} - y_n) < x_{n-1} - x_n < (l + \frac{\varepsilon}{2})(y_{n-1} - y_n),$$

...

$$(l - \frac{\varepsilon}{2})(y_m - y_{m+1}) < x_m - x_{m+1} < (l + \frac{\varepsilon}{2})(y_m - y_{m+1}),$$

所以 $(l - \frac{\varepsilon}{2})(y_m - y_{n+1}) < x_m - x_{n+1} < (l + \frac{\varepsilon}{2})(y_m - y_{n+1})$,

$$l - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_m - x_{n+1}}{y_m - y_{n+1}} < l + \frac{\varepsilon}{2}$$

因 $\frac{x_m}{y_m} - l = (\frac{x_m - x_{n+1}}{y_m - y_{n+1}} - l)(1 - \frac{y_{n+1}}{y_m}) + \frac{x_{n+1} - l y_{n+1}}{y_m}$, 所以

$$|\frac{x_m}{y_m} - l| = |(\frac{x_m - x_{n+1}}{y_m - y_{n+1}} - l)|(1 - \frac{y_{n+1}}{y_m})| + |\frac{x_{n+1} - l y_{n+1}}{y_m}|$$

因 $y_m > y_{n+1}$, 且 $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = 0$, 即 $\lim_{k \rightarrow +\infty} (x_{n+1} - ly_{n+1}) = 0$, 所以对确定的 m , 存在 $N_1 > 0$, 当 $n > N_1$ 时, $|\frac{x_{n+1} - ly_{n+1}}{y_m}| < \frac{\varepsilon}{2}$, 因此

$$|\frac{x_m}{y_m} - l| = |(\frac{x_m - x_{n+1}}{y_m - y_{n+1}} - l)|(1 - \frac{y_{n+1}}{y_m})| + |\frac{x_{n+1} - ly_{n+1}}{y_m}| < \varepsilon,$$

得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_k}{y_k} = l. \quad \square$$

习题 1.5

习题 4 设集 $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$, 点 $x \in \mathbb{R}^n$. 用 $d(x, A)$ 代表 x 到 A 的距离, 即 $d(\{x\}, A)$. 证明: $x \in \bar{A}$ 的充分必要条件是 $d(x, A) = 0$.

证明 充分性: 若 $d(x, A) = 0$, 假设 $x \notin \bar{A}$, 那么 $x \in \bar{A}^c$, \bar{A}^c 是开集, 所以存在 $\delta > 0$, 使得 $B(x, \delta) \subset \bar{A}^c$, 所以 $d(x, A) \geq d(x, \bar{A}) \geq \delta$, 与 $d(x, A) = 0$ 矛盾, 所以假设不成立, $x \in \bar{A}$.

必要性: 若 $x \in \bar{A}$, 假设 $d(x, A) = \delta > 0$, 则 $B(x, \frac{\delta}{2}) \cap A = \emptyset$, $B(x, \frac{\delta}{2}) \cap \bar{A} \neq \emptyset$, 所以 $A \subset \bar{A} \setminus B(x, \frac{\delta}{2}) \subset \bar{A}$, 而 $\bar{A} \setminus B(x, \frac{\delta}{2})$ 是闭集, 与 \bar{A} 是 A 的闭包矛盾, 所以 $d(x, A) = 0$. \square

习题 7 设 $E \subset \mathbb{R}^n, E \neq \emptyset$. 把 E 的全体极限点所成的集合记成 E' , 叫作 E 的导出集. 规定 $\emptyset' = \emptyset$. 证明: $\bar{E} = E' \cup E$.

证明 1). $\forall x \in \bar{E}$, 若 $x \notin E$, 下证 $x \in E' \setminus E$, 假设 $x \notin E' \setminus E$, 则 $\exists r, B(x, r) \cap (E \setminus \{x\}) = B(x, r) \cap E = \emptyset$, 但是 $B(x, r) \cap \bar{E} \neq \emptyset$, 所以 $E \subset \bar{E} \setminus B(x, r) \subset \bar{E}$, $\bar{E} \setminus B(x, r)$ 是闭集, 这与 \bar{E} 的定义矛盾, 所以 $x \in E' \setminus E$, 即 $x \in E' \cup E, \bar{E} \subseteq E' \cup E$;

2). $\forall x \in E' \cup E$, 若 $x \in E$, 则 $x \in \bar{E}$, 下设 $x \in E' \setminus E$, 假设 $x \notin \bar{E}$, 则 $x \in \bar{E}^c, \bar{E}^c$ 是开集, 所以存在 $r > 0$, 使得 $B(x, r) \subset \bar{E}^c$, 即 $B(x, r) \cap \bar{E} = B(x, r) \cap E = \emptyset$, 这与 $x \in E'$ 矛盾, 所以假设不成立, $x \in \bar{E}, E' \cup E \subseteq \bar{E}$.

综上所述, 得 $\bar{E} = E' \cup E$. \square

习题 8 设 $E \subset \mathbb{R}^n, E \neq \emptyset, x \in \mathbb{R}^n$. 如果 $\forall r > 0$, 同时有

$$B(x, r) \cap E \neq \emptyset, \text{ 和 } B(x, r) \cap E^c \neq \emptyset$$

那么就称 x 为 E 的边界点. 把 E 的所有边界点组成的集合记作 L . 证明: $L = \bar{E} \setminus \overset{\circ}{E}$.

证明 1). $\forall x \in L$, 因对任意的 r , 有 $B(x, r) \cap E^c \neq \emptyset$, 所以 $x \notin \overset{\circ}{E}$, 下证 $x \in \bar{E}$. 假设 $x \notin \bar{E}$, 则 $x \in \bar{E}^c$, 即存在 $r > 0, B(x, r) \subset \bar{E}^c$, 所以 $B(x, r) \cap E = B(x, r) \cap \bar{E} = \emptyset$. 与题设矛盾, 所以假设不成立, $x \in \bar{E}$, 即 $L \subseteq \bar{E} \setminus \overset{\circ}{E}$.

2). $\forall x \in \bar{E} \setminus \overset{\circ}{E}$, 因 $x \notin \overset{\circ}{E}$, 所以 $\forall r > 0$, 有 $B(x, r) \cap E^c \neq \emptyset$; 下证 $B(x, r) \cap E \neq \emptyset$. 假设 $\exists r > 0, B(x, r) \cap E = \emptyset$, 则 $B(x, r) \cap \bar{E} = \emptyset$, 否则若 $B(x, r) \cap \bar{E} \neq \emptyset$, 可得 $E \subset \bar{E} \setminus B(x, r) \subset \bar{E}$, 这与 \bar{E} 的定义矛盾, 所以 $B(x, r) \cap \bar{E} = \emptyset$, 那么 $x \notin \bar{E}$, 矛盾, 所以 $B(x, r) \cap E \neq \emptyset$, $x \in L$, 因此 $\bar{E} \setminus \overset{\circ}{E} \subseteq L$.

综上所述, 得 $L = \overline{E} \setminus \overset{\circ}{E}$. □

习题 12 证明无理数与实数一般多。

证明 我们只要建立一个从无理数到实数的一一映射即可。设全体无理数集合为 I , 无理数集集合 $B = \{\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, \dots, n\sqrt{2}, \dots\}$, $A = I \setminus B$, 即 $I = A \cup B$; 那么实数集 $\mathbb{R} = I \cup Q = A \cup B \cup Q$. 因为 B 和 Q 都是可数集, 所以 $B \cup Q$ 也是可数集, 那么在 B 和 $B \cup Q$ 之间有一一映射, 设为 g :

$$g: B \longrightarrow B \cup Q$$

作无理数集 I 到实数集 \mathbb{R} 之间的一一映射 f 如下:

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{当 } x \in B \text{ 时;} \\ x, & \text{当 } x \in A \text{ 时} \end{cases}$$

所以无理数与实数一般多。 □

习题 1.6

习题 1 求 (1) $\lim_{\min(x,y) \rightarrow +\infty} (\frac{xy}{x^2+y^2})^{x^2}$, (2) $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow 0^+} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 (1). 因 $\min(x, y) \rightarrow +\infty$, 所以我们不妨认为 $x > 0, y > 0$, 那么 $x^2 + y^2 \geq 2xy \geq 0$, 所以 $\frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}$, 所以 $(\frac{xy}{x^2+y^2})^{x^2} \leq (\frac{1}{2})^{x^2}$, 所以 $0 \leq \lim_{\min(x,y) \rightarrow +\infty} (\frac{xy}{x^2+y^2})^{x^2} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{2})^{x^2} = 0$. 所以

$$\lim_{\min(x,y) \rightarrow +\infty} (\frac{xy}{x^2+y^2})^{x^2} = 0.$$

(2). 对 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin(t)}{t} = 1$ 的证明略去. 那么

$$0 \leq \left| \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \left| \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \frac{xy}{x^2+y^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2} \right|$$

所以

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow 0^+} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x^2+y^2 \rightarrow 0^+} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim_{x^2+y^2 \rightarrow 0^+} \frac{xy}{x^2+y^2} \cdot \lim_{x^2+y^2 \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2+y^2} = 0. \square$$

习题 3 证明函数 $f(x, y) = \sin(xy)$ 在 \mathbb{R}^n 上不一致连续, 事实上

$$\forall \delta > 0, \sup\{f(P) - f(Q) : |P - Q| < \delta\} = 2.$$

证明 对 $\forall \delta > 0$, 当 $n \in N_+, n > \frac{\pi}{\delta}$ 时, 设 $P = (n, \frac{\pi}{2n}), Q = (n, \frac{3\pi}{2n})$, 则

$$|f(P) - f(Q)| = \left| \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2n}\right) - \sin\left(n \cdot \frac{3\pi}{2n}\right) \right| = \left| \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right| = 2$$

而对任意的 $P, Q, |f(P) - f(Q)| \leq 2$ 是显然的, 所以

$$\forall \delta > 0, \sup\{f(P) - f(Q) : |P - Q| < \delta\} = 2.$$

函数 $f(x, y) = \sin(xy)$ 在 \mathbb{R}^n 上不一致连续. \square

习题 5 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. 证明: $f \in C(\mathbb{R}^n)$ 的充分必要条件是, \mathbb{R} 的每个开集 G 在 f 之下的原象 $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in G\}$ 都是开集.

证明 必要性. 即已知 $f \in C(\mathbb{R}^n)$, 对 \mathbb{R} 中的任意开集 G , 记其原象是 $f^{-1}(G)$, 不妨设 $f^{-1}(G) \neq \emptyset$. 取 $\forall x \in f^{-1}(G), f(x) \in G$, 则 $f(x)$ 是 G 的内点, 即存在 $\text{varepsilon} > 0$ 使得 $B(f(x), \text{varepsilon}) \subseteq G$, 有连续函数性质, 知 $\exists \delta > 0$, 当 $|y - x| < \delta$ 时, 就有 $|f(y) - f(x)| < \text{varepsilon}$, 即 $f(y) \in B(f(x), \text{varepsilon})$, 所以 $f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \text{varepsilon}) \subseteq G$, $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(G)$, 所以 x 是 $f^{-1}(G)$ 的内点, 由 x 的任意性, 知 $f^{-1}(G)$ 是开集.

充分性. 已知 \mathbb{R} 的每个开集 G 在 f 之下的原象 $f^{-1}(G)$ 都是开集, 对 $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \in \mathbb{R}$, 事实上, 对 $\forall \varepsilon > 0$ 都有 $f(x) \in B(f(x), \varepsilon)$, 因 $B(f(x), \varepsilon)$ 是开集, 所以其原象 $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ 也是开集, $x \in f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$, 也就是说对任意的 $|y - x| < \delta$, 都有 $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$, 所以 $f \in C(\mathbb{R}^n)$.
 \square