第 3 章　积分学

§4.　几乎连续函数及其积分

定义积分的目的, 不仅仅是为了纯理论的研究, 还要解决实际的问题, 这也是近二百年前微积分理论建立的初衷. 现在我们来考虑积分的计算. 可以很自然地想到, 要想给出对于一个很一般的函数的积分的算法, 除了使用定义,几乎没有其它的可能.我们实际能做的,是把多元函数的积分的计算化成一元函数的积分的计算.而对于一元函数的积分,我们所能计算的,归根到底也就是那些初等函数的积分.

这节我们先从理论上来研究比较好的函数的积分. 下一节再对于一元初等函数的积分做详细的讨论.当然我们还应该进一步考虑用好的函数来近似一般函数的办法.

下面谈到的$\mathbb{R}^n$中的矩形,都指各边分别与坐标轴平行的内部不空的有界矩形,既不必是闭的也不必是开的.

定义4.1　设f是D上的实值函数. 如果存在集$E \subset D$,$|E| = 0$,且在$D \setminus E$的每点处f都(相对于D)连续,确言之

$$\forall rall\, x \in D \setminus E,\ \forall rall\, \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ 当 y \in D \cap B(x;\delta) 时,\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

那么就说f在D几乎连续. 如果f在D上有界且几乎连续,就说$f \in R(D)$.

我们用符号$R(D)$代表在D上几乎连续的有界函数的全体,意在纪念著名的德国数学家G.F.B.Riemann (1826~1866).

显然,$C(D) \subset R(D)$.

定理4.1　$R(D) \subset L(D)$.

证　设$f \in R(D)$. 我们只需证明f在D可测. 我们知道(见§1, 例1),$|D| = |\mathring{D}|$, 即$|D \setminus \mathring{D}| = 0$, 其中$\mathring{D}$代表$D$的内部.我们用$\partial D := D \setminus \mathring{D}$代表$D$的边界,它是零测度集.

由于f几乎连续, 所以存在集合$E \subset D$, $|E| = 0$, f在$D \setminus E$的每点都相对于D连续.

令$A := \mathring{D} \setminus E$. 设$c \in \mathbb{R}$.

对于$x \in A(f > c) := \{y \in A :\ f(y) > c\}$, 由连续性知存在$\delta = \delta(x) > 0$,使

$$B(x, \delta) \subset \mathring{D}\,(f > c).$$

记此$B(x,\delta(x))=G(x)$,它是开集.令

$$G=\bigcup_{x\in A}G(x).$$

那么,G是开集,并且

$$\left(\overset{\circ}{D}(f>c)\setminus E\right)\subset G\subset(\overset{\circ}{D}(f>c)).$$

可见

$$\begin{aligned}D(f>c)=&\overset{\circ}{D}(f>c)\cup(\partial D)(f>c)\cup E(f>c)\\=&G\cup(\partial D)(f>c)\cup E(f>c).\end{aligned}$$

于是,$D(f>c)$可测.证得f可测. □

现在我们用“度量方式”来刻画$R(D)$.

定义4.2　设D是$\mathbb{R}^n$中的矩形.如果$\Delta_j,j=1,\cdots,m$是有限个矩形,满足条件

$$\Delta_k\bigcap\Delta_j=\varnothing\ \text{当}\ k\neq j,\quad\bigcup_{j=1}^{m}\Delta_j=D,\tag{4.1}$$

那么就称$\mathbb{P}=\mathbb{P}(D):=\{\Delta_1,\cdots,\Delta_m\}$为$D$的一个分法(partition).并记

$$|\mathbb{P}|:=\max\{\mathrm{diam(\Delta_j):\ j=1,\cdots,m}\},\tag{4.2}$$

其中, 对于任意的$E\subset\mathbb{R}^n$, $\mathrm{diam(E):=\sup\{|u-v|:\ u,v\in E}$ 代表E的直径(diameter).对于任意的$r>0$,令

$$\mathscr{P}_r(D):=\{\mathbb{P}(D):\ |\mathbb{P}(D)|\leqslant r\}.\tag{4.3}$$

定义4.3　设D是$\mathbb{R}^n$ 中的矩形, $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$有界.对于任意的$\mathbb{P}(D):=\{\Delta_1,\cdots,\Delta_m\}$,

$$f_{\mathbb{P}}^{-}:=\sum_{j=1}^{m}u_j\chi_{\Delta_j},\quad f_{\mathbb{P}}^{+}:=\sum_{j=1}^{m}v_j\chi_{\Delta_j},\tag{4.4}$$

其中$u_j=\inf\{f(x):x\in\Delta_j,\ v_j=\sup\{f(x):x\in\Delta_j,\ j=1,\cdots,m$. 分别把$f_{\mathbb{P}}^{-}$和$f_{\mathbb{P}}^{+}$叫做$f$关于分法$\mathbb{P}$的下阶梯函数以及上阶梯函数.

定理4.2　设D是$\mathbb{R}^n$ 中的矩形, $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$有界.那么$f\in R(D)$的充分必要条件是$f\in L(D)$)并且对于任取的$\mathbb{P}_k\in\mathscr{P}_{k^{-1}}(D),\ k=1,2,\cdots$

$$\lim_{k\to\infty}\int_D f_{\mathbb{P}_k}^{-}=\int_D f=\lim_{k\to\infty}\int_D f_{\mathbb{P}_k}^{+}.\tag{4.5}$$

证　设$f\in R(D)$. 那么,根据定理4.1, $f\in L(D)$.设$E\subset D$是f的不连续点的全体. 那么测度$|E|=0$.

设$x\in D\setminus E$.那么对于任意的$\varepsilon>0$, 存在正整数N,使得当$y\in D$ 且$|y-x|\leqslant N^{-1}$时,$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.于是当$k>N$时,对于任意的$\mathbb{P}_k\in\mathscr{P}_r(D)$都成立

$$0\leqslant f(x)-f_{\mathbb{P}_k}^{-}(x)<\varepsilon.$$

从而

$$\lim_{k\to\infty} f^-_{\mathbb{P}_k} = f, \quad \text{a.e.}$$

设正数M是$|f|$的上界.对于任给的 $\varepsilon > 0$,根据Егоров 定理,存在$A \subset D$使得$|A| < \varepsilon M^{-1}$, 并且在$D \setminus A$上$\{f^-_{\mathbb{P}_k}\}_{k=1}^{\infty}$一致收敛到$f$,即

$$\lim_{k\to\infty} \sup\{f(x) - f^-_{\mathbb{P}_k}(x) : x \in D \setminus A\} = 0.$$

那么

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \int_D f - f^-_{\mathbb{P}_k} &= \int_A f - f^-_{\mathbb{P}_k} + \int_{D\setminus A} f - f^-_{\mathbb{P}_k} \\ &\leqslant M|A| + \sup\{f(x) - f^-_{\mathbb{P}_k}(x) : x \in D \setminus A\}|D \setminus A| \\ &\leqslant \varepsilon + \sup\{f(x) - f^-_{\mathbb{P}_k}(x) : x \in D \setminus A\}|D|. \end{aligned}$$

由此得到

$$\limsup_{k\to\infty} \left| \int_D f - f^-_{\mathbb{P}_k} \right| \leqslant \varepsilon.$$

从而,让$\varepsilon \to 0+$就得到

$$\lim_{k\to\infty} \int_D \left(f - f^-_{\mathbb{P}_k}\right) = 0.$$

可以完全类似地得到

$$\lim_{k\to\infty} \int_D \left(f^+_{\mathbb{P}_k} - f\right) = 0.$$

现在设$f \in L(D)$,并设对于任取的一列$\mathbb{P}_k \in \mathscr{P}_{k^{-1}}(D),\ k = 1, 2, \cdots$ (4.5)式成立.那么

$$\lim_{k\to\infty} \int_D \left(f^+_{\mathbb{P}_k} - f^-_{\mathbb{P}_k}\right) = 0. \tag{4.6}$$

下面我们证明,实际上不必假设 $f \in L(D)$,只需对于一列 $\{\mathbb{P}_k\}_{k=1}^{\infty}$,(4.6)式成立就能推出 $f \in R(D)$.

对于$x \in D$,我们定义f在x处的**跳跃**(jump)为

$$j(f)(x) = \inf_{\delta>0}\ \sup\left\{|f(u) - f(v)| :\ u, v \in \left(B(x,\delta) \bigcap D\right)\right\}.$$

显然这个下确界实为$\delta \to 0+$时的极限.易见,f在$x \in D$处连续的充分必要条件是$j(f)(x) = 0$ (习题3.4,题7).

由 $j(f)$的定义可见,对于一切 $k \in \mathbb{N}_+$和几乎每个 $x \in D$

$$0 \leqslant j(f)(x) \leqslant f^+_{\mathbb{P}_k}(x) - f^-_{\mathbb{P}_k}(x).$$

所以(4.6)蕴含

$$\int_D j(f) = 0.$$

此式等价于$j(f) = 0$ a.e.从而 $f \in R(D)$. □

定理4.2告诉我们, 对于$R(D)$中的函数,可按定理4.2中的两个极限$\lim_{k\to\infty}\int_D f^-_{\mathbb{P}_k}$或者$\lim_{k\to\infty}\int_D f^+_{\mathbb{P}_k}$的来计算其积分.常用的介乎下阶梯函数$f^-_{\mathbb{P}_k}$和上阶梯函数$f^+_{\mathbb{P}_k}$之间的函数是$f_\xi := \sum_{j=1}^m f(\xi_j)\chi_{\Delta_j}$,其中$\xi_j \in \Delta_j$, $j = 1, \cdots, m$可随意选取.函数f_ξ的积分

$$\int_D f_\xi = \sum_{k=1}^m f(\xi_j)|\Delta_j| \tag{4.7}$$

通常叫做f的Riemann和. 这种计算积分的方法,叫做Riemann积分法,它一般**只对于$R(D)$的函数适用**.

例4.1　把$\mathbb{Q}^n$叫做n维比例数集.把$\mathbb{Q}^n$ 的特征函数叫做Dirichelet函数(见§3,例3.1). 现在我们把这个函数记为f.设D是内部不空的有界方块.显然,f在D上处处不连续(实际上$j(f)(x) = 1$),所以$f \notin R(D)$.

从另一方面来说,对于D的一切分法$\mathbb{P}$

$$\int_D f^-_{\mathbb{P}} = 0, \quad \int_D f^+_{\mathbb{P}} = |D|.$$

例4.2　设$D = (0,1)$, $\mathbb{Q}\cap D = \{r_j:\ j \in \mathbb{N}_+\}$. 设$\delta > 0$.定义

$$B_j(\delta) = \{x \in \mathbb{R}:\ |x - r_j| < 2^{-j-1}\delta\}, \quad G(\delta) = \bigcup_{j=1}^{+\infty} B_j(\delta).$$

那么,$G(\delta)$是$\mathbb{R}$中的有界开集.记$f = \chi_{G(\delta)\cap D}$. 我们说当$\delta < 1$时,$f \notin R(D)$.

证　对于每个$m \in \mathbb{N}_+$,定义分法

$$\mathbb{P}_m = \Big\{\Delta_k^m = D \cap \Big[\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}\Big) : k = 1, \cdots, m\Big\}, \quad m \in \mathbb{N}_+.$$

那么,对于$\varphi_m := f^-_{\mathbb{P}_m}$,　$\psi_m := f^+_{\mathbb{P}_m}$,我们有

$$\varphi_m(x) = \sum_{k=1}^m \inf\{f(x) : x \in \Delta_k^m\}\chi_{\Delta_k^m}, \quad \psi_m = \sum_{k=1}^m \sup\{f(x) : x \in \Delta_k^m\}\chi_{\Delta_k^m},$$

其中系数

$$\inf\{f(x) : x \in \Delta_k^m\} = \begin{cases} 1, & \text{当 } \Delta_k^m \subset G, \\ 0, & \text{当 } \Delta_k^m \subset G^c, \\ 0, & \text{当 } \Delta_k^m \cap G \neq \varnothing \text{ 并且 } \Delta_k^m \cap G^c \neq \varnothing. \end{cases}$$

$$\sup\{f(x) : x \in \Delta_k^m\} = \begin{cases} 1, & \text{当 } \Delta_k^m \subset G, \\ 0, & \text{当 } \Delta_k^m \subset G^c, \\ 1, & \text{当 } \Delta_k^m \cap G \neq \varnothing \text{ 并且 } \Delta_k^m \cap G^c \neq \varnothing. \end{cases}$$

由此推出

$$\psi_m - \varphi_m = \sum_{k:\Delta_k^m\cap G\neq\varnothing, \Delta_k^m\cap G^c\neq\varnothing} \chi_{\Delta_k^m}.$$

但是,由于对于每个k都显然成立$\Delta_k^m \cap G \supset (\Delta_k^m \cap G \cap \mathbb{Q}) \neq \varnothing$,所以

$$\int_D \psi_m - \int_D \varphi_m = \sum_{k:\Delta_k^m\cap G^c\neq\varnothing} \chi_{\Delta_k^m} \geqslant \int_{D\cap G^c} 1 = |D \cap G^c| \geqslant 1 - |G| \geqslant 1 - \delta > 0.$$

那么,根据定理4.2, 当$\delta < 1$时$f \notin R(D)$. □

注 例4.2表明,按照Riemann的度量方式(即Riemann积分法),上述开集$D\cap G$是**不可量度的**.然而,按照Lebesgue的度量方式(即Lebesgue 积分法),$D\cap G$作为$\aleph_0$个两两不交的开区间的并集,其大小(测度),就是这些开区间的长度之和.所以可以说, Riemann积分法的本质缺陷是**不承认σ加性**,而Lebesgue积分法恰是**以σ加性为出发点**的.

例4.3 下面定义的$(0,1)$上的函数叫做Riemann函数:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q} & \text{当 } x\text{是既约分数 } \dfrac{p}{q} \quad (q\in\mathbb{N}_+),\\[2ex] 0 & \text{当 } x\text{不是比例数}.\end{cases}$$

显然,f在$(0,1)$的比例数处间断. 设x不是比例数, $x\in(0,1)$. 任给$k\in\mathbb{N}_+$,在$(0,1)$内分母不大于k的既约分数只有有限个,它们与x的最近距离记做δ.那么,当$|y-x|<\delta$ 且$y\in(0,1)$时,

$$|f(y)-f(x)|<\frac{1}{k}.$$

可见,f在x点连续.于是f在$(0,1)$上几乎连续,从而Riemann函数$f\in R(0,1)$ (我们自然地把$R((0,1))$简写为$R(0,1)$).而且$\int_{(0,1)} f=0$.

例4.4 设f是有界区间I上的有界的单调函数,那么$f\in R(I)$.这是因为,f只有可数个间断点,所以几乎连续.

利用单调函数的特性,我们给出下述一元积分的中值公式.这个公式常被用于积分的估计.

定理4.4(积分中值公式) 设$I=[a,b]$是$\mathbb{R}$中的有界区间. 若f在I上单调, $g\in L(I)$. 那么,存在$c\in I$,使

$$\int_I (fg)=f(a)\int_{(a,c)} g+f(b)\int_{(c,b)} g.$$

证 暂且认为f是单调减的,并且$f(b)=0$.

设$m\in\mathbb{N}_+, m>2$.令

$$x_k^m=a+\frac{k}{m}(b-a),\quad k=0,1,\cdots,m.$$

那么

$$\int_I (fg)=\sum_{k=1}^{m}\int_{(x_{k-1}^m,x_k^m)}(fg)=A_m+B_m, \tag{4.8}$$

其中

$$A_m:=\sum_{k=1}^{m}\int_{(x_{k-1}^m,x_k^m)} f(x_k^m)g(x)\,dx,$$

$$B_m:=\sum_{k=1}^{m}\int_{(x_{k-1}^m,x_k^m)} (f(x)-f(x_k^m))g(x)\,dx.$$

令$G(x)=\int_{[a,x]} g$. 用和差变换(见习题3.3题8的提示)得

$$A_m=\sum_{k=1}^{m-1}(f(x_k^m)-f(x_{k+1}^m))G(x_k^m).$$

注意到$G(a)=0$,我们得到

$$A_m=\sum_{k=0}^{m-1}(f(x_k^m)-f(x_{k+1}^m))G(x_k^m).$$

由积分的绝对连续性立刻看到$G\in C(I)$.设

$$p=\max\{G(x):\ x\in I\},\quad q=\min\{G(x):\ x\in I\}.$$

注意到对于每个$k=0,1,\cdots,m-1$

$$f(x_k^m)-f(x_{k+1}^m)\geqslant 0,$$

我们得到

$$qf(a)\leqslant A_m\leqslant pf(a).$$

由于连续函数G取遍中间值,所以存在$c_m\in I$使

$$A_m=f(a)G(c_m).\tag{4.9}$$

另一方面,定义

$$\omega(t)=\sup\left\{\int_E|g|:\ E\subset I,\ |E|\leqslant t\right\}\quad (t\geqslant 0).$$

那么由积分的绝对连续性知

$$\lim_{t\to 0}\omega(t)=0.$$

由于

$$|B_m|\leqslant\sum_{k=1}^{m}(f(x_{k-1}^m)-f(x_k^m))\omega(\frac{b-a}{m})=f(a)\omega(\frac{b-a}{m}).$$

所以

$$\lim_{m\to\infty}|B_m|=0.\tag{4.10}$$

把(4.9)代入(4.8)得

$$\int_I(fg)=f(a)G(c_m)+B_m.\tag{4.11}$$

由于$\{c_m\}_{m=3}^{+\infty}$是紧集I中的数列,所以必有收敛子列.无妨认为它自己收敛到$c\in I$.那么,在(4.11)中令$m\to+\infty$,就得到

$$\int_I(fg)=f(a)G(c).$$

现在取消对于$f(b)=0$的限制.以$h=f-f(b)$代替f,用已证之结果,得有某$c\in I$,使

$$h(a)G(c)=\int_I(hg)=\int_I(fg)-f(b)\int_I g=(f(a)-f(b))\int_{[a,c]}g.$$

由此移项便得

$$f(a)\int_{[a,c]}g+f(b)\int_{[c,b]}g=\int_I(fg).$$

当f单调增时,对$-f$用已证之结果便得欲证者. □

习 题 3.4

1 设简单函数

$$\phi=\sum_{k=1}^{m}c_k\chi_{E_k}$$

的表达式中诸E_k都是有界区间,则称ϕ为**阶梯函数**.证明:若$f\in R(a,b)$,则$\forall rall\,\varepsilon>0$, 存在阶梯函数$\phi$,使

$$\int_{(a,b)}|f-\phi|<\varepsilon.$$

2 设D是$\mathbb{R}^n$中的矩形, $f\in R(D)$.若$f\geqslant r>0$,则$\dfrac{1}{f}\in R(D)$.

3 设D是$\mathbb{R}^n$中的矩形,$f\in R(D)$.若$f>0$,则$\sqrt{f}\in R(D)$.

4 设$f(x)=\dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right]$, $x>0$.求证: $f\in R(0,1)$.

5 证明: 函数在一点处连续的充分必要条件是它在这点处的跳跃等于零.

6 设f是例3中的Riemann函数.对于每个$x\in(0,1)$写出$j(f)(x)$.

7 定义

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & x\neq 0,\\ 0 & x=0.\end{cases}$$

求$j(f)(0)$.

8 设$f,g\in R(D)$.证明:

$$2\int_D(fg)\leqslant\int_D f^2+\int_D g^2.$$

9 设f在$\mathbb{R}$上单调增.证明:

$$\int_{(0,m)}f\leqslant\sum_{k=1}^{m}f(k)\leqslant\int_{(1,m+1)}f.$$

10 若f在$[a,\infty)$上单调,有界,且$g\in L(a,\infty)$, 则存在$c\in[a,\infty]$使

$$\int_{[a,\infty)}(fg)=f(a)\int_{(a,c)}g+f(+\infty)\int_{(c,+\infty)}g,$$

其中$f(+\infty):=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.这是无界区间上的积分中值定理.

11 设 $f\in L(0,1)$, $\varepsilon>0$.证明: 存在$g\in R(0,1)$使得$\displaystyle\int_{(0,1)}|f-g|<\varepsilon$.

12 设 $f\in R(0,1)$, $\varepsilon>0$.证明: 存在$g\in C[0,1]$使得$\displaystyle\int_{(0,1)}|f-g|<\varepsilon$.

13 设D是$\mathbb{R}^n$中的矩形,E是$\mathbb{R}^n$中的零测度集. 证明: $f\in R(D\setminus E)\Longleftrightarrow f\in R(D)$.

§5　微积分基本定理

这节讨论一元函数.

§5.1　微积分基本定理

设$-\infty < a < b < \infty$.设$f \in R[a,b]$.我们把记号$R([a,b])$自然地简化为$R[a,b]$,遇类似情况不再说明.

我们的问题是如何计算$\displaystyle\int_{(a,b)} f$.

微积分基本定理　设$f \in R[a,b]$.若f在$[a,b]$上有原函数F,则

$$\int_{(a,b)} f = F(b) - F(a).$$

证　设$m \in \mathbb{N}_+$充分大.记

$$x_k = a + \frac{k}{m}(b-a),\ k = 0,1,\cdots,m.$$

那么$\mathbb{P}_m := \{[x_{k-1},x_k) : k = 1,\cdots,m\}$,是$[a,b)$分法.并且

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{m} \big(F(x_k) - F(x_{k-1})\big).$$

根据Lagrange定理(第二章1.2.4), 存在$\xi_k \in (x_{k-1},x_k)$,使

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

可见

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

由于$F \in C[a,b] \subset R[a,b)$,而上式右端是$f$在$[a,b)$上关于分法$\mathbb{P}_m$的Riemann和(见§4, (4.7)),并且当$m \to \infty$时$|\mathbb{P}_m| = m^{-1}(b-a) \to 0$, 所以令$m \to \infty$得

$$F(b) - F(a) = \int_{(a,b)} f. \qquad \square$$

微积分基本定理又叫做Newton-Leibniz公式,以后简写做N-L公式,

I.Newton, 1642～1727; G.W.Leibniz, 1646～1716.

下边我们用经典的记号来表示区间上的积分. 如果实数$a < b$,$f \in L(a,b)$, 我们记

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{(a,b)} f = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

从另一方面来说,我们有下述定理.

定理5.1　设$f \in L[a,b]$. 定义

$$F(x) = \int_a^x f\,,\quad x \in [a,b].$$

那么,当x是f的连续点时,$F'(x)=f(x)$. 因此当$f\in C[a,b]$ 时,F是f的一个原函数.而当$f\in R[a,b]$ 时,$F'=f, a.e.$

证 设x是f的连续点.对于$\delta>0$, 定义

$$j(f)(x,\delta)=\sup\{|f(u)-f(v)|:\quad u,v\in[a,b]\cap(x-\delta,x+\delta)\}.$$

那么对于$h\neq 0, x+h\in[a,b]$

$$h^{-1}(F(x+h)-F(x))=h^{-1}\int_x^{x+h}f.$$

从而

$$\begin{aligned}|h^{-1}(F(x+h)-F(x))-f(x)|&=|h^{-1}\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))\,dt|\\&\leqslant j(f)(x,|h|).\end{aligned}$$

令$h\to 0$, 由于

$$\lim_{\delta\to 0}j(f)(x,\delta)=j(f)(x)=0,$$

就得$F'(x)=f(x)$. □

在积分$\int_{(a,b)}f$中,若视a,b为常数,则把它叫做**定积分**,否则，作为积分区间右端点的函数，(区间不定的积分)给出了f的一个原函数. Newton-Leibniz公式及定理5.1告诉我们的这一事实,或许就是第二章§7中的“不定积分”一词的来由.

根据定理3.6的推论2,我们直接得到下述定理,它使我们可以在无界区间上使用Newton-Leibniz公式.

定理5.2 设$f\in L(\mathbb{R})$,并且对于一切实数$a<b$, $f\in R[a,b]$. 若f在$\mathbb{R}$上有原函数F,则必有

$$\lim_{b\to\infty}F(b)=:B\in\mathbb{R},\quad \lim_{a\to-\infty}F(a)=:A\in\mathbb{R},$$

并且

$$\int_{\mathbb{R}}f=B-A.$$

把条件中的$\mathbb{R}$换为形如$[a,\infty)$或$(-\infty,b]$的一端有界的区间时相应的结论也成立. □

基于Newton-Leibniz公式和求原函数的算法(见第二章§7),我们下边导出相应的积分法.

§5.2 换元积分法

首先重申关于记号的规定：若$f\in L[a,b]$，则记

$$\int_{(a,b)}f=\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx.$$

引理5.3 设$f\in C(\mathbb{R}),\phi\in C^1[a,b],\psi\in C^1[a,b]$.定义

$$F(x)=\int_{\phi(x)}^{\psi(x)}f(y)\,dy,\quad x\in[a,b].$$

那么

$$\forall rall\, x\in[a,b],\quad F'(x)=f(\psi(x))\psi'(x)-f(\phi(x))\phi'(x).$$

证　定义
$$G(u)=\int_0^u f(t)\,dt,\quad u\in\mathbb{R}.$$
那么
$$F(x)=G(\psi(x))-G(\phi(x)).$$
按复合函数求导的法则
$$F'(x)=G'(\psi(x))\psi'(x)-G'(\phi(x))\phi'(x).$$
注意到$G'(u)=f(u)$就完成了证明. □

注1　函数f的定义范围不必是整个$\mathbb{R}$,只要是覆盖$\varphi([a,b])\cup\psi([a,b])$的区间即可.

定理5.4　设$f\in C(\mathbb{R}),\psi\in C^1[a,b]$.那么
$$\int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(y)\,dy=\int_a^b f(\psi(x))\psi'(x)\,dx.$$

证　在引理5.3中取$\phi=0$,得
$$F'(x)=f(\psi(x))\psi'(x).$$
那么,用Newton-Leibniz公式就得
$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(\psi(x))\psi'(x)\,dx.$$ □

例5.1　求
$$A:=\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

解　我们先把被积函数中的因子x化掉.我们用换元法$x=\pi-y$ 处理积分
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{(\pi-y)\sin y}{1+\cos^2 y}dy.$$
于是
$$\begin{aligned}A&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x}dx.\end{aligned}$$
再用换元法,$y=\cos x$得
$$A=\int_0^1 \frac{\pi}{1+y^2}dy.$$
再用Newton-Leibniz公式,得
$$A=\pi\Big(\arctan 1-\arctan 0\Big)=\frac{\pi^2}{4}.\quad\square$$

注2　这里的换元法，其根据是Newton-Leibniz公式.用换元法计算积分时,不象计算原函数, 这里不存在把自变量换回去的问题, 不必考虑换元的可逆性.

§5.3 分部积分法

设$u, v \in C^1[a,b]$.那么

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

故由Newton-Leibniz公式得如下分部积分公式:

$$u(b)v(b) - u(a)v(a) = \int_a^b (uv)' = \int_a^b u'v + \int_a^b uv'.$$

为方便,常记

$$uv\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

例5.2 求$A = \displaystyle\int_0^{\ln 4} xe^{-x}dx$.

解 令$u(x) = -e^{-x}, v(x) = x$,用分部积分公式,得

$$A = -\frac{1}{4}\ln 4 + \int_0^{\ln 4} e^{-x}dx.$$

接着用Newton-Leibniz公式得

$$A = -\frac{1}{4}\ln 4 + \frac{3}{4}.$$ □

附录 课堂练习

例5.3 设f在$[a,b]$上单调减且连续. 定义

$$\forall rall\, x \in (a,b), \quad F(x) = \frac{1}{x-a}\int_a^x f.$$

证明:$\forall rall\, x \in (a,b),\ F'(x) \leqslant 0$.

证

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\frac{1}{(x-a)^2}\int_{(a,x)} f(t)\,dt + \frac{1}{x-a}f(x) \\ &= -\frac{1}{(x-a)^2}\int_{(a,x)} (f(t)-f(x))\,dt \leqslant 0. \end{aligned}$$ □

例5.4 设$e^2 < a < b$. 那么

$$\int_{(a,b)} \frac{dx}{\ln x} < \frac{2b}{\ln b}.$$

证 分部积分得

$$I := \int_{(a,b)} \frac{dx}{\ln x} = \frac{x}{\ln x}\Big|_a^b + \int_{(a,b)} \frac{dx}{\ln^2 x}.$$

注意到

$$\int_{(a,b)} \frac{dx}{\ln^2 x} \leqslant \frac{1}{\ln a}I < \frac{1}{2}I,$$

得

$$\frac{1}{2}I < \frac{b}{\ln b}$$

由此得到所欲证者. □

例5.5　设$f \in C^2[a,b]$, $f(a)=f(b)=0$.那么

$$\Big|\int_{(a,b)} f\Big| \leqslant \frac{1}{12}(b-a)^3\|f''\|_{C[a,b]}.$$

证　记$I=\displaystyle\int_{(a,b)} f$, $d=b-c$.用换元法得

$$I=\int_0^d f(x+a)\,dx=\int_0^d f(b-x)\,dx.$$

记$g(x)=f(x+a), h(x)=f(b-x)$. 那么

$$g,h\in C^2[0,d],\ g(0)=g(d)=h(0)=h(d)=0.$$

分部积分两次得

$$\begin{aligned}I&=\int_0^d g(x)\,dx=-\int_0^d xg'(x)\,dx\\&=-d^2g'(d)+\int_0^d xg'(x)\,dx+\int_0^d x^2g''(x))\,dx\\&=-d^2g'(d)-I+\int_0^d x^2g''(x))\,dx.\end{aligned}$$

由此

$$2I=-d^2g'(d)+\int_0^d x^2g''(x))\,dx.$$

同理

$$2I=-d^2h'(d)+\int_0^d x^2h''(x))\,dx.$$

两式相加,用N-L公式及换元法,得

$$\begin{aligned}4I&=-d^2g'(d)-d^2h'(d)+\int_0^d x^2g''(x)\,dx+\int_0^d x^2h''(x)\,dx\\&=-d^2(f'(b)-f'(a))+\int_0^d x^2f''(x+a)\,dx+\int_0^d x^2f''(b-x)\,dx\\&=-d^2\int_a^b f''(x)\,dx+\int_a^b (x-a)^2f''(x)\,dx+\int_a^b (b-x)^2f''(x)\,dx\\&=\int_a^b \Big((x-a)^2+(b-x)^2-(b-a)^2\Big)f''(x)\,dx\\&=\int_a^b \Big(2x^2-2(a+b)x+2ab\Big)f''(x)\,dx.\end{aligned}$$

因此

$$2|I|\leqslant\|f''\|_c\int_a^b (b-x)(x-a)\,dx=\frac{1}{6}(b-a)^3\|f''\|_c,$$

式中$\|f''\|_c=\|f''\|_{C[a,b]}$　□.

例5.6 设$f \in C^2(\mathbb{R})$且满足下述微分方程:

$$\begin{cases} f'' + f = 0, \\ f(0) = f'(0) = 0. \end{cases}$$

求f.

解 用微分学的方法最简单.因为

$$\frac{d}{dx}((f')^2 + f^2) = 2f'f'' + 2ff' = 2f'(f'' + f) = 0$$

所以,$f^2 + (f')^2$为常数.但$f(0) = f'(0) = 0$,故$f = 0$.

若用N-L公式,则

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\,dt, \quad f'(t) = \int_0^t f''(s)\,ds.$$

于是

$$f(x) = \int_0^x \Big(\int_0^t f''(s)\,ds\Big)\,dt.$$

从而

$$\begin{aligned} \|f\|_{C[0,1]} &\leqslant \int_0^1 \Big(\int_0^t \|f\|_{C[0,1]} ds\Big)\,dt \\ &= \|f''\|_{C[0,1]} \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}\|f''\|_{C[0,1]}. \end{aligned}$$

于是由$f'' = -f$,得

$$\frac{1}{2}\|f\|_{C[0,1]} = \|f\|_{C[0,1]}.$$

这意谓着$\|f\|_{C[0,1]} = 0$.递推地对$f_k(x) = f(x+k), k \in \mathbb{Z}$用已得的结论,就推出$f = 0$. □

例5.7 设$f(x) = x^{-\alpha},\ x > 0$.那么,当$\alpha < 1$时,$f \in L(0,1)$,且

$$\int_{[0,1]} f(x)\,dx = \frac{1}{1-\alpha}.$$

证 任取$\varepsilon \in (0,1)$,用N-L公式

$$\int_{(\varepsilon,1)} f(x)\,dx = \frac{1}{1-\alpha}(1 - \varepsilon^{1-\alpha}).$$

用定理3.3,

$$\int_{[0,1]} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{(\varepsilon,1)} f(x)\,dx.$$

所以

$$\int_{[0,1]} f(x)\,dx == \frac{1}{1-\alpha}. \ \square$$

例5.8 设$f(x) = \dfrac{\sin x}{x},\ x > 0$. 定义

$$F(y) = \int_{(0,y)} f(x)\,dx, \quad y \in \mathbb{R}.$$

定义在$\mathbb{R}$上的函数F叫作积分正弦（专门记作Si）. 求证$f \notin L(0,+\infty)$但是

$$\lim_{y\to+\infty} F(y) \in \mathbb{R}.$$

证　设$y_2 > y_1 > 1$.用积分中值公式(定理4.4),存在$\xi \in (y_1, y_2)$,使

$$F(y_2) - F(y_1) = y_1^{-1}\int_{y_1}^{\xi} \sin x\,dx + y_2^{-1}\int_{\xi}^{y_2} \sin x\,dx.$$

所以

$$|F(y_2) - F(y_1)| \leqslant 4y_1^{-1}.$$

根据Cauchy收敛准则,

$$\lim_{y\to+\infty} F(y) \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

另一方面,对于任意的$m \in \mathbb{N}_+$

$$\begin{aligned}
\int_{(0,+\infty)} |f(x)|\,dx &\geqslant \sum_{k=1}^{m}\int_{(k-\frac{1}{2})\pi}^{(k+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx\\
&\geqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{2}{(k+1)\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx\\
&\geqslant \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\int_{k+1}^{k+2} \frac{dx\pi}{x}\\
&= \frac{2}{\pi}(\ln(m+2) - \ln 2).
\end{aligned}$$

上式右端无上界.故$f \notin L(0,+\infty)$. $\square$

在以往的教科书中, 把收敛的极限$\lim\limits_{y\to+\infty}\int_{(0,y)} f(x)\,dx$ 记作$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$, 并称之为反常积分. 这里我们为了强调这是一个特定的极限,而且避免与$f \in L(0,+\infty)$的情形混淆, 把这个反常积分记作

$$\int_0^{\to+\infty} f(x)\,dx.$$

我们应注意,正如例5.8表明的,这个极限是实数并不意味着$f \in L(0,+\infty)$(当然,对于非负可测函数这是对的).而当$f \in L(0,+\infty)$时$\int_0^{\to+\infty} f(x)\,dx$就是一个正常的积分.

习 题 3.5

1　计算

1) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi y^2)\,dy$;　　2) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{x^2} \sqrt{1+y^2}\,dy$;

3) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;　　4) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy$;

5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a\cos^2 x + b\sin^2 x}\ (a,b>0)$;　　6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 y\,dy$;

7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin 2x}\, dx$; 8) $\int_1^5 \frac{dx}{x(1+x)}$;

9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin 2x}\, dx$; 10) $\int_0^5 |2-x|\, dx$.

2 证明

$$\lim_{m\to\infty} \int_{(m,2m)} \frac{\sin x}{x} dx = 0.$$

3 设

$$P(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad \forall \varepsilon > 0,\ P_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-1} P(\varepsilon^{-1} x).$$

求

$$\int_{\mathbb{R}} P_\varepsilon(x)\, dx.$$

4 设$f \in L[a,b]$.定义

$$\forall x \in (a,b), \quad F(x) = \int_{(a,x)} f.$$

证明F具有下述性质:

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$, 使得对于$(a,b)$内的任意一族两两不交的开区间$(a_k, b_k)$, $k \in I \subset \mathbb{N}_+$, 只要

$$\sum_{k\in I} (b_k - a_k) < \delta,$$

就有

$$\sum_{k\in I} |F(a_k) - F(b_k)| < \varepsilon.$$

具有这种性质的函数叫做是**绝对连续**的.

5 设$f \in L[a,b]$.求证:存在$c \in [a,b]$,使

$$\int_{[a,c]} f = \int_{[c,b]} f.$$

6 用积分求

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + m^p}{m^{p+1}} \quad (p \geqslant 0).$$

7 设$0 < a < 1$,$f(x) = x^{-a}\ x > 0$.证明$f \in L(0,1)$并求

$$\int_{(0,1)} f.$$

8 设$f \in C(\mathbb{R}^n)$, 且$\forall p > 1\ \ |f|^p \in L(\mathbb{R}^n)$. 证明:

$$\lim_{p\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|.$$

9 设$f \in C[0,1]$. 证明:

$$\lim_{p\to\infty} \int_0^1 p e^{-px} f(x)\, dx = f(0).$$

10 设$f(x) = x^{-1}\sin x^{-1}$, $x > 0$.证明:$f \notin L(0,1)$,但是

$$\lim_{a\to 0+}\int_a^1 f(x)\,dx \in \mathbb{R}.$$

正象例5.8那样,以往的教科书中多把这样的收敛的极限记作$\int_0^1 f(x)\,dx$,叫作以$x = 0$为瑕点的反常积分或瑕积分.这里我们为了强调这是一个特定的极限， 而且避免与$f \in L(0,1)$的情形混淆，把这个瑕积分记作$\int_{0+}^1 f(x)\,dx$.应当注意，它是实数，或说它收敛，并不意味着$f \in L(0,1)$. 而如果$f \in L(0,1)$,则$\int_{0+}^1 f(x)\,dx$就是一个无瑕的正常积分($x = 0$就不是瑕点).

11 用Maple画出积分正弦Si(见本节例5.8）的图像，求出Si(π)的值.