目录

第五章　曲线和曲面上的第二型积分

我们早在第三章§6,作为积分理论的应用,谈论过"曲线"和"曲面"上的第一型积分.本章继续讨论积分理论在解决具体的物理的和几何的问题中的应用.这些问题联系着场(field)的概念,所涉及的积分叫做**第二型积分**.有的书上把这类讨论叫做"向量微积分(vector calculus)".

我们对于曲面积分的讨论,为了避免几何上的复杂性,只涉及 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面.

§1　场(field)的概念　数量场的梯度场

在物理学中,讨论过"电场","磁场","力场".它们分别是电、磁、力作用的空间.例如,一块小磁铁的有效的磁力作用范围,也许不超过与磁铁距离10米的空间.而地球的引力作用范围就大得多,也许要把整个太阳系都算上, 在这样一个范围里,有许多的星体以万有引力而交互作用,这样一个"力场"就相当复杂.一个静止的荷电量很小,比如一库仑的"点电荷"的有效作用范围也可能不超过10立方公里.如果只考虑它的独立的静电作用,这样一个10立方公里的空间,就是它产生的静电场.

从数学上来描述上述的各种物理学的场,着眼点就不只是"有效作用范围",而是在作用范围内每点处的实际作用的大小和方向.而且场也不必局限于 $\mathbb{R}^3$之中.因此数学中"场" 的概念就被抽象为 $\mathbb{R}^n$(的连通开集) 到 $\mathbb{R}^n$的映射.当然,从 $\mathbb{R}^n$(的连通开集) 到 $\mathbb{R}$的映射f ,也可以叫做场–常量场.

定义 1.1(场, field)　设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 中的不空的开集, 并设 $F: V \longrightarrow \mathbb{R}^n$.强调 F 为向量(vector),记之为 $\vec{F}$,称 $(V, \vec{F})$为**场**(或向量场),当无需强调定义域 V 时,简称 $\vec{F}$ 为场.

定义 1.2(数量场)　设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 中的不空的开集, 并设 $f: V \longrightarrow \mathbb{R}$. 称 (V, f)为**数量场**,当无需强调定义域 V 时,简称 f 为数量场.

联系于物理的及几何学的应用,我们只讨论连续的,或者具有一阶导数(甚至更高

的“光滑性”)的场.

例 1.1(重力场)　根据 Issac Newton的引力定律,任何两个质点 A 和 B 之间,都具有相互吸引的力,其大小为

$$|\vec{F}_{AB}| = |\vec{F}_{BA}| = Gm_{_A}m_{_B}d(A,B)^{-2}$$

其中, $m_{_A}$和 $m_{_B}$分别代表质点A和质点B的质量, $\vec{F}_{AB}$和 $\vec{F}_{BA}$ 分别代表从 A 到 B 的力(叫做“B 对于 A 的力),和从 B 到 A 的力(叫做“A 对于 B 的力); $d(A,B) > 0$代表点 A 和点 B 之间的距离(此值不太小的情况下上式才与实验相符);G 是**万有引力常数**(它的值大约是 $6.67259 \times 10^{-11}\frac{\text{米}^3}{\text{千克}\times\text{秒}^2}$).

设地球的半径为R(其值约为7340公里).把地球抽象成质点,位于原点,质量为 M(其值大约为 5.9742×10^{24} 千克).那么,位于$x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $(|x| > R)$ 处,质量为$m(x)$的质点的受地球的引力为

$$F(x) = -GMm(x)|x|^{-3}x \quad \text{或用向量写法 } \vec{F}(x) = -GMm(x)|x|^{-3}\vec{x}.$$

现在 $V := \{x \in \mathbb{R}^3 :\ |x| > R\}$, $(V, \vec{F})$ 就是地球产生的重力场.

当局限在地球表面的上,相对于地球的大小而言非常小的范围内,考虑的质点的质量 m 相对于地球质量而言非常小时, 质点受到的重力(地球引力) $\vec{F}$ 近似等于质量 m 与**重力加速度** $\vec{g}$ 的乘积, 即 $\vec{F} = m\vec{g}$. g 的方向垂直向下,大小为 $9.8\frac{\text{米}}{\text{秒}^2}$.

例 1.2(数量场的梯度场)　设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 中的不空的开集, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. 那么 (V, f)是一个数量场.如果 f 处处可导, $f'(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x))$　$x \in \mathbb{R}^n$, 那么 $(\mathbb{R}^n, f')$ 叫做 (V, f) 的梯度场. 在第二章§1 中曾讲过, 导数f' 也常叫做梯度(gradient), 并习惯上用∇f 表示, 也记作$\mathrm{grad}\, f$. 根据第二章§1,1.5 的结果, ∇f 给出了 f 变化最剧烈的方向.

看一看 $n = 1$ 的情形是有益的.这时数量场 $(\mathbb{R}, f)$ 的梯度场是 $(\mathbb{R}, \vec{f'})$,导数 $f'(x)$ 被看作是向量($\vec{f'}(x)$),其起点为数轴上的点x,其大小为 $|f'(x)|$, 其方向当$f'(x) > 0$时为数轴的正方向, 而当$f'(x) < 0$时为数轴的负方向. 由于只有两个可能的方向,而它们完全被数值 $f'(x)$的正负所确定,所以记号 $f'(x)$ 与记号 $\vec{f'}(x)$ 完全可以不加区别(当 $n > 1$ 时,符号 $\vec{f'}$或许有一种提醒的作用,但舍弃它也未尝不可.我们使用向量记号只是遵从历史的习惯而已.

设$c \in f(V)$. 称曲面

$$\mathscr{S}_c = \{(x, y, z) :\ F(x, y, z) = c\}$$

为场(V, f)(或函数f) 的等值面 (f 取相同值 c 的曲面).容易证明(作为习题),当$\nabla f(P)$不是零向量时,它的方向垂直于过点P的等值面$\mathscr{S}_c$ (过曲面$\mathscr{S}$上一点P的直线ℓ与$\mathscr{S}$垂直,指的是 ℓ 与 $\mathscr{S}$ 在 P 点处的切平面垂直).

向量场沿着曲线或曲面的积分,叫做**第二型积分**,它们的精确定义分别在下面两节中给出.

习 题 5.1

复习第三章 § 6关于曲线和曲面的基本概念.

§ 2　第二型曲线积分

先回顾一下曲线的的自然表示,详细的讨论见第三章 §6.2.

设$[a, b]$ 是有限区间, f 是$[a, b]$ 到$\mathbb{R}^n$ 中的C^1类映射(变换):

$$\forall t \in [a, b], \quad f(t) = (f_1(t), \cdots, f_n(t)),$$

其中$f_k \in C^1[a, b]$, $k = 1, \cdots, n$.我们称

$$\mathscr{L} := \{f(t) : \ t \in [a, b]\} \tag{2.1}$$

为 C^1类曲线,称f为它的**表示**.规定当$t_1 < t_2$ 时, $\mathscr{L}$ 上的点$f(t_1)$ 在$f(t_2)$ 前面, 这样, 循着t 增大的方向而规定了曲线的方向. 当然, 令$g(t) = f(-t)$, $t \in [-b, -a]$. 则由g 表示的曲线仍是 $\mathscr{L}$, 只不过此时曲线的方向与原来相反. 如果对于一切$t \in [a, b]$, $|f'(t)| > 0$, 则说 f 是 $\mathscr{L}$的一个**正则表示**. 如果曲线$\mathscr{L}$具有一个正则表示, 则称之为**正则曲线**.

设$\mathscr{L}$是$\mathbb{R}^n$中的一条正则曲线, f是它的一个正则表示, 如(2.1). 对于$[a, b]$ 的任一分点组Ω: $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_m = b$, 记$S(\mathscr{L}; f, \Omega)$ 为顺次联结$f(t_0), f(t_1), \cdots, f(t_m)$ 的折线的长, 即

$$S(\mathscr{L}; f, \Omega) = \sum_{k=1}^{m} |f(t_k) - f(t_{k-1})|.$$

定义

$$S(\mathscr{L}; f) := \sup\{S(\mathscr{L}; f, \Omega) : \Omega\text{为}[a, b]\text{的分点组}\}.$$

我们证明过, $S(\mathscr{L}; f)$ 的值与正则表示 f 的取法无关.因此,这个值被定义为**曲线 $\mathscr{L}$ 的长度,记作 $|\mathscr{L}|$.**

我们还求出了正则曲线的长度计算公式：设$\mathscr{L}$是正则曲线，$f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ 是它的正则表示.那么

$$|\mathscr{L}| = \int_a^b |f'(t)|\,dt. \tag{2.2}$$

对于由(2.1) 定义的正则曲线 $\mathscr{L}$, 从点$f(a)$ 到点$f(t)$ (按规定方向) 的一段的长度是

$$s(t) = \int_a^t |f'(\tau)|\,d\tau, \quad t \in [a,b].$$

我们证明过,此函数 $s:[a,b]\longrightarrow[0,|\mathscr{L}|]$ 有连续的反函数$t:[0,|\mathscr{L}|]\longrightarrow[a,b]$. 于是我们得到曲线$\mathscr{L}$ 的如下表示

$$\phi(s) = f(t(s)), \quad 0 \leqslant s \leqslant |\mathscr{L}|, \tag{2.3}$$

我们曾证明,函数ϕ是 $\mathscr{L}$ 的正则表示,叫做**自然表示.**在(2.3)中,自然表示借助正则表示 f 与函数 t 的复合给出,但很明显,它与正则表示 f (及依赖于 f 的 t)的选取无关.

我们知道 $\phi' = f'(t(s))t'(s) = \dfrac{f'(t(s))}{|f'(t(s))|}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位向量(即长度为1的向量). 它是 $\mathscr{L}$ 在点$\phi(s)$ 处(依ϕ 给出的方向) 的单位切向量(参阅第二章§6, 6.1).为了强调 ϕ' 的向量性质,我们把它记作$\overrightarrow{\phi'}$(当然这记法并不必要).

切向量$\vec{\phi'}$是$\mathscr{L}$ 本身几何性质的刻画, 当$\mathscr{L}$ 的方向取定时,切向量与正则表示f的具体取法无关；当$\mathscr{L}$ 的方向改成相反的方向时, 切向量由$\vec{\phi'}$ 变为$-\vec{\phi'}$.

如果正则曲线$\mathscr{L}$的自然表示 ϕ 是 C^2 类的,那么我们称 $|\phi''(s)|$ 为$\mathscr{L}$ 在点$\phi(s)$ $(s \in [0,|\mathscr{L}|])$ 处的曲率, 称$\vec{\phi''}(s)$ 的方向(如果$|\phi''(s)| \neq 0$) 为该点处的主法向.

容易看到, 曲率及主法向与曲线的方向无关, 它刻画的是曲线的弯曲状况.

设$\mathscr{L}$是$\mathbb{R}^n$ 中的正则曲线，f是它的正则表示. 设h 是$\mathscr{L}$ 到$\mathbb{R}$ 的映射. 我们知道,如果 $h(f(t)) \in L[a,b]$, 则 h 沿 $\mathscr{L}$ 的第一型曲线积分为

$$\int_{\mathscr{L}} h(P)\,dP = \int_a^b h(f(t))|f'(t)|\,dt.$$

显然, 第一型曲线积分本质上就是区间上的定积分. 如果$\mathscr{L}$ 就是线段(用区间$[0,\ell]$ 表示) 那么,就完全回到原始意义下的积分.不过注意, 说到沿线段$[\ell,0]$(与$[0,\ell]$仅方向相反)的积分时, 我们指的仍然是沿$[0,\ell]$ 的积分.也就是说,第一型曲线积分与方向无关. 这与我们现在要讨论的第二型积分不同.

设$\mathscr{L}$ 是$\mathbb{R}^n$ 中的一条正则曲线, 记$|\mathscr{L}| = \ell$. 设

$$\begin{aligned}&\phi:\,[0,\ell] \to \mathscr{L} \subset \mathbb{R}^n,\\&\phi(s) = (\phi_1(s),\cdots,\phi_n(s)) \quad (s \in [0,\ell])\end{aligned}$$

是$\mathscr{L}$ 的自然表示. 现假设 g 是 $\mathscr{L}$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的映射(变换),

$$\forall \phi(s) \in \mathscr{L} \quad (s \in [0,\ell]), \quad \vec{g}(\phi(s)) = (g_1(\phi(s)),\cdots,g_n(\phi(s))).$$

这里为了强调$g(\phi(s))$是$\mathbb{R}^n$中的点，使用向量符号予以标记（而对于点$\phi(s)$ 未加标记）.我们知道$\mathscr{L}$上点$\phi(s)$处的切向量是 $\vec{\phi}'(s) = (\phi_1'(s),\cdots,\phi_n'(s))$.那么内积

$$\vec{g}(\phi(s)) \cdot \vec{\phi}'(s) = \sum_{k=1}^{n} g_k(\phi(s))\phi_k'(s).$$

定义 2.1 如果对于每个$k \in \{1,\cdots,n\}$,都有

$$g_k(\phi(s))\phi_k'(s) \in L[0,\ell]$$

则称积分

$$\int_0^\ell \vec{g}(\phi(s)) \cdot \vec{\phi}'(s)\,ds = \sum_{k=1}^{n} \int_0^\ell g_k(\phi(s))\phi_k'(s)\,ds \tag{2.4}$$

为 g (或 $\vec{g}$) 在$\mathscr{L}$ 上的第二型曲线积分, 记之为 $\displaystyle\int_{\mathscr{L}} \vec{g}(P) \cdot d\vec{P} = \int_{\mathscr{L}} \vec{g}(\phi(s)) \cdot d\vec{\phi}(s)$.

注 2.1 我们对于一些历史上留下的,至今仍被使用的记号作一些说明.当 $P = \phi(s) \in \mathscr{L}$ 时,形式地把 $d\vec{P}$ 和 $d\vec{\phi}(s)$视为一物, 理解为记号

$$(d\phi_1(s),\cdots,d\phi_n(s)),$$

而“$\cdot$”表示内积.把变换g标上矢量符号记作“ $\vec{g}$ ”的好处是能强调“内积”与“数乘”的区别. 于是(2.4)式的右端被写成

$$\int_{\mathscr{L}} \vec{g}(\phi(s)) \cdot d\vec{\phi}(s) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^\ell g_k(\phi(s))d\phi_k(s),$$

其中记号

$$\int_0^\ell g_k(\phi(s))\,d\phi_k(s) \quad (k = 1,\cdots,n)$$

表示的是积分

$$\int_0^\ell g_k(\phi(s))\phi_k'(s)\,ds \quad (k = 1,\cdots,n).$$

当把 $\mathscr{L}$ 上的点 $\phi(s)$ 记作 $x = x(s) = (x_1(s), \cdots, x_n(s))$, 它的第 k 坐标记作$x_k = x_k(s)$时, $d\vec{P}$就是 $d\vec{x}$. 于是(2.4)就被写成

$$\int_{\mathscr{L}} \vec{g}(P) \cdot d\vec{P} = \int_{\mathscr{L}} \vec{g}(x) \cdot d\vec{x}.$$

其中我们没有把 $\vec{g}(P)$ 写成 $\vec{g}(\vec{P})$,是因为感到箭头套箭头的视觉效果不太好.其实一个箭头都不要,倒好像更利索, 我们压根儿就没把 $\mathbb{R}^n$ (包括 $n=1$ 的情形)中的“点”和“向量”加以区别.

注 2.2 由于 ϕ' 是单位向量,它和第 k 坐标轴的夹角是

$$\alpha_k(s) := \arccos \phi'_k(s), \quad k = 1, \cdots, n,$$

那么第二型曲线积分(2.4) 可写成

$$\int_{\mathscr{L}} \vec{g}(\phi(s)) \cdot d\vec{\phi}(s) = \int_0^{\ell} \sum_{k=1}^{n} g_k(\phi(s)) \cos \alpha_k(s)\, ds.$$

注 2.3 (对于一维情形常用记号的说明) 从定义 2.1 直接看出, 当改变$\mathscr{L}$ 的方向时, 由于ϕ' 只改变符号, 所以第二型积分(2.4) 也只改变符号.如果我们的曲线就是$\mathbb{R}$中的线段$[a,b]$,那么对于$f \in L[a,b]$,

$$\int_{(a,b)} f$$

表示的是第一型曲线积分,而

$$\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$$

则表示的是按照自变量增加的方向(X轴的正方向)的**第二型曲线积分**, 由于在同一直线上的向量的内积等于在默认的方向之下两向量的大小的值（带正负符号）的乘积，所以对于一维情形，总是不用向量内积的符号. 这是历史上的习惯形成的，希望心中明白，不要有任何混淆.

定义第二型曲线积分借助于曲线的自然表示,但是计算第二型曲线积分却没必要一定使用曲线的自然表示.

定理 2.1 设$\mathbb{R}^n$ 中的曲线$\mathscr{L}$ 是正则的, $f : [a,b] \longrightarrow \mathscr{L}$是它的正则表示. 设 g 是 $\mathscr{L}$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的映射. 如果

$$\vec{g}(f(t)) \cdot \vec{f}'(t) \in L[a,b],$$

则 g 沿 $\mathscr{L}$ 的第二型曲线积分

$$\int_{\mathscr{L}} \vec{g}(P) \cdot d\vec{P} = \int_a^b \vec{g}(f(t)) \cdot \vec{f}'(t)\, dt.$$

证 在定理的条件下, 函数 $s(t)=\int_a^t |f'(\tau)|\,d\tau$, $(t\in[a,b])$ 有反函数 $t=t(s)$ $s\in[0,\ell]$. 在积分

$$\int_a^b \vec{g}(f(t))\cdot\vec{f}'(t)\,dt$$

中做变量替换$t=t(s)$, 得

$$\int_a^b \vec{g}(f(t))\cdot\vec{f}'(t)\,dt=\int_0^\ell \vec{g}(f(t(s)))\cdot\vec{f}'(t(s))t'(s)\,ds.$$

由于 $f(t(s))=\phi(s)$ 恰是曲线的自然表示(见(2.3)),再根据

$$\vec{\phi}'(s)=\vec{f}'(t(s))t'(s),$$

所以

$$\int_a^b \vec{g}(f(t))\cdot\vec{f}'(t)\,dt=\int_0^\ell \vec{g}(\phi(s))\cdot\vec{\phi}'(s)\,ds. \qquad \square$$

注 2.4 ① 自然地规定,沿着由有限段正则曲线联成的曲线,第二型曲线积分为各段上的积分之和(当然保持统一的方向).

② 从定义 2.1直接看出, 如果$\mathscr{L}$ 是闭曲线, 那么, 只要方向确定, 从$\mathscr{L}$ 的任何一点起始, 至这点终止, , 第二型曲线积分的值都是一样的. 所以, 当$\mathscr{L}$是闭曲线(由有限条正则曲线连接而成)时, 在整条曲线上的第二型曲线积分不必说明曲线的始点和终点, 而只规定其方向即可.

现在我们举例来说明第二型曲线积分的物理背景.换言之，我们通过实例来看一看，第二型曲线积分是应用积分论解决何种实际问题的数学工具.

例 2.1 给定力场 $(\mathbb{R}^3,\vec{F})$, 其中

$$\vec{F}(x,y,z)=(F_1(x,y,z),F_2(x,y,z),F_3(x,y,z))$$

表示质点在位置$(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ 处受的力. 设有一个质点m 从位置$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 沿一曲线路径$\mathscr{L}$ 运动到位置$P(x,y,z)$. 我们来确定力场对此质点所作的功.

如果$\mathscr{L}$ 恰是线段$\overline{P_0P}$, 而力$\vec{F}$ 是大小方向都不变的, 那么, 力场作的功为$\vec{F}$ 在向量$\overrightarrow{P_0P}$ 的正方向的投影与$\overrightarrow{P_0P}$ 的长度的乘积, 即

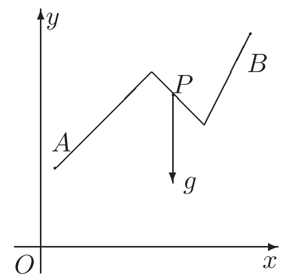
$$W=\vec{F}\cdot\overrightarrow{P_0P}.$$

然而, 力$\vec{F}$ 不必不随位置变化, 路径$\mathscr{L}$ 不必是直线段. 但上面特殊情形下的公式启发我们定义所求的功为

$$W=\int_{\mathscr{L}}\vec{F}(P)\cdot d\vec{P}$$

即力场$\vec{F}$ 沿$\mathscr{L}$ 的第二型曲线积分.

例2.2 (续 **例 2.1**). 设力场是地球表面的重力场. 此时, 力是由质点的质量m 与重力加速度(看成是方向向下的常向量) $\vec{g}$ 的乘积给出.



如果质量为m 的质点P 在竖直平面中沿有限条正则曲线联成的曲线$\mathscr{L}$ 由点A 移动到了点B, 那么这一过程中重力作的功为

$$W = \int_{\mathscr{L}} m\vec{g} \cdot d\vec{P}.$$

按图示的坐标系, 给$\mathscr{L}$ 以自然表示

$$P(s) = (x(s), y(s)), \quad s \in [0, \ell], \quad (\ell = |\mathscr{L}|).$$

那么$\vec{g} = (0, -g)$ (我们用字母g 表示重力加速度向量的大小）.于是

$$W = -\int_0^{\ell} mgy'(s)\, ds = mg(y(0) - y(\ell)).$$

我们看到W 仅由始点A和终点B 的高度之差所决定,而与$\mathscr{L}$的形状无关.

例 2.3 设$\mathscr{L}$ 是$\mathbb{R}^3$ 中柱面$x^2 + y^2 = 1$ 与平面$x + y + z = 0$ 的交线, 沿z 轴方向依右手螺旋法则规定其方向. 求

$$J = \int_{\mathscr{L}} (y - z)\, dx + (z - x)\, dy + (x - y)\, dz.$$

解 首先我们注意到, 这里的积分式子使用了注2.1中所规定的写法. 我们知道

$$\mathscr{L} = \{(x, y, z) :\, x^2 + y^2 = 1,\, x + y + z = 0\}.$$

令$x = \cos\theta, y = \sin\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. 得$z = -\cos\theta - \sin\theta$. 而由几何的观察知,$\theta$ 的增长与$\mathscr{L}$的规定方向一致. 所以

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{2\pi} [2\sin\theta + \cos\theta)x'(\theta) + (-2\cos\theta - \sin\theta)y'(\theta) \\ &\quad + (\cos\theta - \sin\theta)z'(\theta)]\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-2\sin^2\theta - 2\cos^2\theta - 1)\, d\theta = -6\pi. \end{aligned}$$ □

体会一下第二型曲线积分与第一型曲线积分的不同之处:

第一型的被积函数是数值函数,第二型则是向量值函数. 处理 $\mathbb{R}^n$ 中的曲线上的第一型积分可把曲线"无伸缩"地拉成直线进行(直线段上的)积分, 而处理第二型积分时不可拉直,这时积分被分成 n 个"分量"(被积函数与曲线切向量的内积的 n 个组成部分)的和.

习 题 5.2

1. 设$\mathscr{L} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=r^2\}\,(r>0)$, 取逆时针方向. 求:
$$\int_{\mathscr{L}} \Big(\frac{x+y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x-y}{x^2+y^2}\,dy\Big).$$
2. 设$\mathscr{L}$ 是$\mathbb{R}^2$ 中以$(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$ 为顶点的正方形曲线, 取逆时针方向. 求:
$$\int_{\mathscr{L}} \frac{1}{|x|+|y|}(dx+dy).$$
3. 设$\mathscr{L}$ 为螺线$\{(a\cos\theta, a\sin\theta, b\theta) :\ \theta\in[0,2\pi]\}$ 取θ 增加的方向. 求:
$$\int_{\mathscr{L}} y\,dx + z\,dy + x\,dz.$$
4. 设$\mathscr{L}$ 上有力场$F=-k(x,y)(k>0)$. 求质点P 沿圆周$\mathscr{L} = \{(x,y) : x^2+y^2 = a^2\}\,(a>0)$ 以逆时针方向运动一周时, 力场所作的功.

§3 沿曲线的Newton-Leibniz公式

定理 3.1 (Newton-Leibniz公式) 设 $V=\{x\in\mathbb{R}^n :\ |x|<M\}\ (M>0)$.给定一个连续的向量场 $(V,\vec{F})$. 如果存在数量场 (V,f),使得 f是 F的一个**原函数**(也叫做反导数, antiderivative),即 $f'=F$,也就是说, $(V,\vec{F})$是 (V,f)的导数场(即梯度场),那么沿着 V中的任何(逐段)正则曲线 $\mathscr{L}$,
$$\int_{\mathscr{L}} \vec{F}(x)\cdot d\vec{x} = f(B)-f(A),$$
其中 A,B 分别是 $\mathscr{L}$的起点和终点.

证 设 $\mathscr{L}$的自然表示为 $\phi:\ [0,\ell]\longrightarrow\mathscr{L}$, $\phi(0)=A$, $\phi(\ell)=B$. 那么根据定义(见(2.4))
$$\int_{\mathscr{L}} \vec{f}(x)\cdot d\vec{x} = \int_0^{\ell}\sum_{k=1}^{n} F_k(\phi(s))\phi_k'(s)\,ds.$$

由于 $f' = F$, 所以

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_k} = F_k(x),\ k = 1, \cdots, n, \quad x \in V,$$

$$\frac{d}{ds}\Big(f(\phi(s)\Big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\Big|_{x=\phi(s)} \phi_k'(s) = \sum_{k=1}^{n} F_k(\phi(s))\phi_k'(s).$$

于是

$$\int_{\mathscr{L}} \vec{F}(x) \cdot d\vec{x} = \int_0^{\ell} \frac{d}{ds}\Big(f(\phi(s)\Big)\, ds.$$

对于上式右端使用已知的N-L公式,就完成了证明. □

注 3.1 ① 说向量场 $(V, \vec{F})$是连续的,指的是 $\vec{F}$的个分量F_k都是 V上的连续函数.定理3.1中的这个条件当然可以适当减弱(例如“ $\vec{F}$在 $\mathscr{L}$ 上连续”就足够了).

② 定理 3.1的证明使用了已知的N-L公式,但它的结论显然是已知的N-L公式的一种推广.

③ 定理 3.1是习题5.3题1的特例.

④ 根据物理学的背景,如果向量场 $(V, \vec{F})$是数量场 (V, f)的导数场(即梯度场),也就是说, f是 F的一个原函数,那么称 f 为 F 的一个**位势函数(potential function)**,此时称 $(V, \vec{F})$为**保守场(conservative field)**.历史上,根据力学的背景,多变元函数 f的**导数(derivative)** f'被叫做**梯度(gradient)**,并记 f'为 grad f或 ∇f(读 ∇为nabla).

定理 3.2 设 V 是 $\mathbb{R}^3$ 中的不空的连通开集, $\vec{F} = (P, Q, R) :\ V \longrightarrow \mathbb{R}^3$,其中, $P, Q, R \in C^1(V)$. 证明: $(V, \vec{F})$ 是某数量场 (V, f) 的导数场(即 f 是 $\vec{F}$ 的一个位势函数)的必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \tag{3.1}$$

证 设 f 是 $\vec{F}$ 的一个反导数.记 $f_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x},\ f_2 = \dfrac{\partial f}{\partial y},\ f_3 = \dfrac{\partial f}{\partial z}$. 那么,$f_1 = P,\ f_2 = Q,\ f_3 = R$. 由于 $f_j \in C^1(V),\ j = 1, 2, 3$, 那么此时混合导数与求导次序无关,即(按照上述关于偏导数的记号的规定)

$$f_{12} = f_{21}, \quad f_{23} = f_{32}, \quad f_{31} = f_{13}.$$

这三个等式恰好就是条件(3.1). □

注 2.6 条件(3.1)在一般情况下并不充分,参阅习题5.2题10.

例 2.4 设 $F(x, y, z) = (2xyz + 3y^2, x^2z + 6xy - 2z^3, x^2y - 6yz^2),\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

① 证明 $\vec{F}$ 满足条件(3.1).

② 求 $\vec{F}$ 的一个反导数(即位势函数).

④ 设 $\mathscr{L} = \{r(t) = (t^2e^t, t+\sqrt{t}, e^t\cos\pi t) :\ 0 \leqslant t \leqslant 4\}$,(沿 t 增加的方向). 求 $\displaystyle\int_{\mathscr{L}} \vec{F}(r)\cdot d\vec{r}$.

解 记 $\vec{F} = (P, Q, R)$. 那么 ①

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xz + 6y, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 2xy,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2xz + 6y, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = x^2 - 6z^2,$$
$$\frac{\partial R}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = x^2 - 6z^2$$

由此证实了(3.1).

② 把 $P(x,y,z) = 2xyz + 3y^2$ 看做 x 的函数而求其原函数,得

$$f(x,y,z) := \int P(x,y,z)\,dx = \int (2xyz + 3y^2)\,dx = x^2yz + 3xy^2 + c(y,z),$$

其中 $c(y,z)$是 (y,z) 的一个函数,它与 x 无关.

令 $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$,得

$$x^2z + 6xy + \frac{\partial c(y,z)}{\partial y} = x^2z + 6xy - 2z^3.$$

从而

$$\frac{\partial c(y,z)}{\partial y} = -2z^3.$$

对于变元 y 求此函数的原函数,得

$$c(y,z) = -2yz^3 + d(z),$$

其中 d 是 z的函数,与 (x,y)无关.那么

$$f(x,y,z) = x^2yz + 3xy^2 + c(y,z) = x^2yz + 3xy^2 - 2yz^3 + d(z).$$

令 $\frac{\partial f}{\partial z} = R$,得

$$x^2y - 6yz^2 + d'(z) = x^2y - 6yz^2.$$

从而 $d'(z) = 0$.那么 $d(z) =$常数. 我们取$d = 0$,就得到 $\vec{F}$ 的一个反导数 $f(x,y,z) = x^2yz + 3xy^2 - 2yz^3$.

③ 根据Newton-Leibniz公式,

$$\int_{\mathscr{L}} \vec{F}(r) \cdot d\vec{r} = f(r(4)) - f(r(0)) = f(16e^4, 6, e^4) - f(0,0,1) = 1524e^{12} + 1728e^4. \quad \square$$

我们强调一下，第二型曲线积分和第一型曲线积分一样，也是解决物理,力学问题的工具, 它是$\mathbb{R}$中的积分理论的一种应用，别认为它是什么新的积分理论.建议读者多作练习以便熟练地掌握算法，而不必在曲线的技术处理的枝节问题（这大多是几何问题）上太花时间.

习 题 5.3

1. 设$f, g \in C^1(\mathbb{R}^3)$, $\mathscr{L}$ 是$\mathbb{R}^3$ 中简单正则曲线, 始点为A, 终点为B. 证明下述关于第二型曲线积分的分部积分公式:

$$\int_{\mathscr{L}} f(P)\vec{g}'(P) \cdot d\vec{P} = (fg)(B) - (fg)(A) - \int_{\mathscr{L}} g(P)\vec{f}'(P) \cdot d\vec{P}.$$

2. 设 $V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z > 0\}$, $F(x,y,z) := (y\ln z, x\ln z, xyz^{-1})$, $(x,y,z) \in V$. 设 $\mathscr{L} := \{r(t) = (\cos\pi t, \sin\pi t, 1+t) :\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$.求场 $(V, \vec{F})$ 沿 $\mathscr{L}$(按 t 的增加方向)的第二型积分(如果把场 $(V, \vec{F})$ 看作是*力场*,那么所求的积分就是力场沿所给曲线所做的功.)

3. (接上题) 设 $\mathscr{L}$是 V 中的任意的正则曲线,始点为 A,终点为 B.证明积分

$$\int_{\mathscr{L}} \vec{F}(r) \cdot d\vec{r}$$

只与 A和 B 的位置有关.

4. 把定理 3.2推广到 $\mathbb{R}^n$ $(n > 3)$中.

5. 设 V 是 $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$中的不空连通开集.证明: $\mathbb{R}^n$ 中向量场 $(V, \vec{F})$是保守场的充分必要条件是,沿场内任何正则闭曲线的第二型积分都是零.

6. 设 $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, 并且

$$F(x,y) := (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}) \quad (x,y) \in V.$$

① 证明: $\vec{F}$在 V 上处处满足(3.1).

② 设 $\mathscr{C}$ 是单位圆周(逆时针方向).证明: $\displaystyle\int_{\mathscr{C}} \vec{F}(P) \cdot d\vec{P} \neq 0$.

③ 向量 $\vec{F}$ 在 V 上有位势函数吗?

④ 设 $V_+ := \{(x,y): x>0\}$, $f(x,y)=\arctan(yx^{-1})$, $(x,y)\in V_+$.

证明:在 V_+ 上 $f'=\vec{F}$.

7. 判断场 $(\mathbb{R}^3,\vec{F})$ 是否保守,如果是,求出 $\vec{F}$ 的位势函数.

① $\vec{F}(x,y,z)=(yz+1,xz+1,xy+1)$;

② $\vec{F}(x,y,z)=(y+z,z+x,x+y)$;

③ $\vec{F}(x,y,z)=(\cos x+2yz,\sin y+2zx,z+2xy)$;

④ $\vec{F}(x,y,z)=(6xy^3+2z^2,9x^2y^2,4xz+1)$;

⑤ $\vec{F}(x,y,z)=(x\sin y,y\sin z,z\sin x)$;

⑥ $\vec{F}(x,y,z)=(0,2yz-z^2,y^2-2yz)$;

8. 设力场 $(\mathbb{R}^3,\vec{F})$ 如下:

$$\vec{F}(x,y,z)=(x,y,z)(x^2+y^2+z^2+3)^{-\frac{3}{2}}.$$

证明此场保守,并求它从点 $(-1,3,4)$ 到 $(2,0,3)$ (沿任意正则曲线)所做的功.

§ 4 $\mathbb{R}^2$ 中的Green 公式

设$\mathscr{L}$ 是$\mathbb{R}^2$ 中的一条闭曲线, 它由有限条正则曲线首尾联结而成. 设$\mathscr{L}$ 是开集D 的边界, 即$\overline{D}\setminus D=\mathscr{L}$. 并设$D$ 具有如下性质: $\forall c\in\mathbb{R}$, 集合

$$\{x\in\mathbb{R}: (x,c)\in D\},\quad \{y\in\mathbb{R}: (c,y)\in D\}$$

皆为开区间(空集也叫做开区间). 如下规定$\mathscr{L}$ 的方向, 使得“人在$\mathscr{L}$ 上沿着这个方向往前走时D总在人的左边”.这是一个很直观的描述性语句. 如果要作稍微抽象一点的规定,也许可以这样说: (规定$\mathscr{L}$ 的方向)“使得$\mathscr{L}$ 上点P 处的切向量($\mathscr{L}$ 上只有有限个点处可以没有切向量) $\overrightarrow{PA}$ 顺时针旋转$\frac{\pi}{2}$ 成为$\overrightarrow{PB}$ 时, P 点是$\overline{PB}\cap\overline{D}^c$ 的极限点.” 称这个方向为关于D 的**逆时针方向** (或正向). 设$F=(P,Q)$ 是$D\to\mathbb{R}^2$ 的C^1 类的映射, 它在$\overline{D}$ 上连续. 那么有**Green公式**

$$\int_{\mathscr{L}}\vec{F}(x,y)\cdot d\overrightarrow{(x,y)}=\int_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

其中左端是沿着上面描述的“逆时针方向”的第二型曲线积分.

Green 公式的证明 根据公式中D 的特征, 定义

$$a=\inf\{x\in\mathbb{R}:(x,y)\in D,y\in\mathbb{R}\},\quad b=\sup\{x\in\mathbb{R}:(x,y)\in D,y\in\mathbb{R}\},$$

$$\phi_1(x)=\inf\{y\in\mathbb{R}:(x,y)\in D\},\quad \phi_2(x)=\sup\{y\in\mathbb{R}:(x,y)\in D\},\quad x\in(a,b).$$

那么, 曲线

$$\mathscr{L}_1:=\{(x,\phi_1(x)):x\in(a,b)\}$$

取正向与曲线

$$\mathscr{L}_2:=\{(x,\phi_2(x):x\in(a,b)\}$$

取负向恰合成$\mathscr{L}$. 于是, 由化成累次积分的办法得

$$\begin{aligned}\int_D\frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy&=\int_a^b dx\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)}\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dy\\&=\int_a^b(P(x,\phi_2(x))-P(x,\phi_1(x))\,dx.\end{aligned}$$

根据对于第二型曲线积分的写法的规定，我们有

$$\int_{\mathscr{L}_1}P\,dx=-\int_{(a,b)}P(x,\phi_1(x))dx,\quad \int_{\mathscr{L}_2}P\,dx=\int_{(a,b)}P(x,\phi_2(x))dx.$$

于是

$$\int_{\mathscr{L}}P\,dx=-\int_D\frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy.$$

同理

$$\int_{\mathscr{L}}Q\,dy=\int_D\frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy.$$

两式合起来证得Green公式. □

推论 若$\mathbb{R}^2$ 中的开集D 连同其边界$\mathscr{L}$ 可以由有限多个满足Green 公式条件的集合拼凑而成, 则在D 及$\mathscr{L}$上此公式成立.

例 4.1 求二重积分

$$J=\int_D x^2\,dxdy,$$

其中$D=\Delta(0,0)(1,0)(0,-1)$是以$(0,0)$, $(1,0)$, $(0,-1)$为顶点的三角形.

解 对$F(x,y)=(0,\frac{1}{3}x^3)$ 在D 上用Green 公式, 得

$$\begin{aligned}J&=-\int_{\overrightarrow{(0,0)(1,0)}}\frac{1}{3}x^3\,dy-\int_{\overrightarrow{(1,0)(0,-1)}}\frac{1}{3}x^3\,dy-\int_{\overrightarrow{(0,-1)(0,0)}}\frac{1}{3}x^3\,dy\\&=-\int_{\overrightarrow{(1,0)(0,-1)}}\frac{1}{3}x^3\,dy=\int_1^0-\frac{1}{3}x^3\,dx=\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

例 4.2 设平面上闭曲线 $\mathscr{C}$ 围成区域 D,满足Green公式的条件. 证明 D 的面积 $|D|$ 可如下计算:

$$|D| = \frac{1}{2}\int_{\mathscr{C}}(-y,x)\cdot d\overrightarrow{(x,y)}.$$

证 根据Green公式,

$$\int_{\mathscr{C}}(-y,x)\cdot d\overrightarrow{(x,y)} = \int_D (1+1)d(x,y) = 2|D|. \qquad \square$$

习 题 5.4

1. 用Green公式算积分.

(1)$\displaystyle\int_{\mathscr{L}}(x+y)dx-(x+y)dy$, $\mathscr{L}$是顺时针椭圆周.

(2)$\displaystyle\int_{\mathscr{L}}e^x(1-\cos y)dx-e^x(y-\sin y)dy,\quad \mathscr{L}=\{(x,\sin x):\ 0<x<\pi\}$,
沿 x 增加的方向.

(3)$\displaystyle\int_{\mathscr{L}}(x^2+y)dx+(x-y^2)dy,\quad \mathscr{L}=\{(x,x^{\frac{2}{3}}:\ 0<x<1\}$, 沿$x$增加的方向.

2. 用Gauss公式算积分.

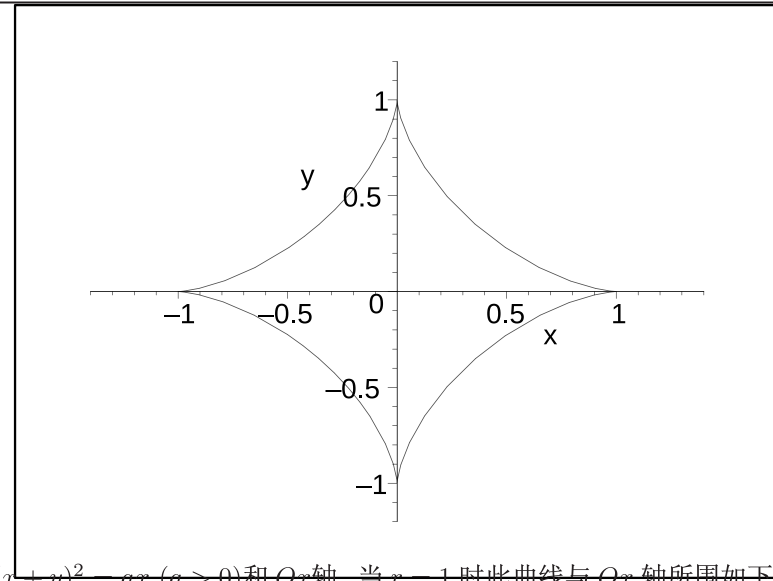
(1) $\displaystyle\int_{\mathscr{S}}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, $\mathscr{S}$是$V=(0,a)^3$的表面的外侧$(a>0)$.

(2) $\displaystyle\int_{\mathscr{S}}(x^2\cos\alpha pha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS$,
$\mathscr{S}=\{(x,y,z):\ x^2+y^2=z^2, 0<x<h\}$, $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$代表$\mathscr{S}$上点$(x,y,z)$处的单位法向量, 且$\cos\gamma<0$.

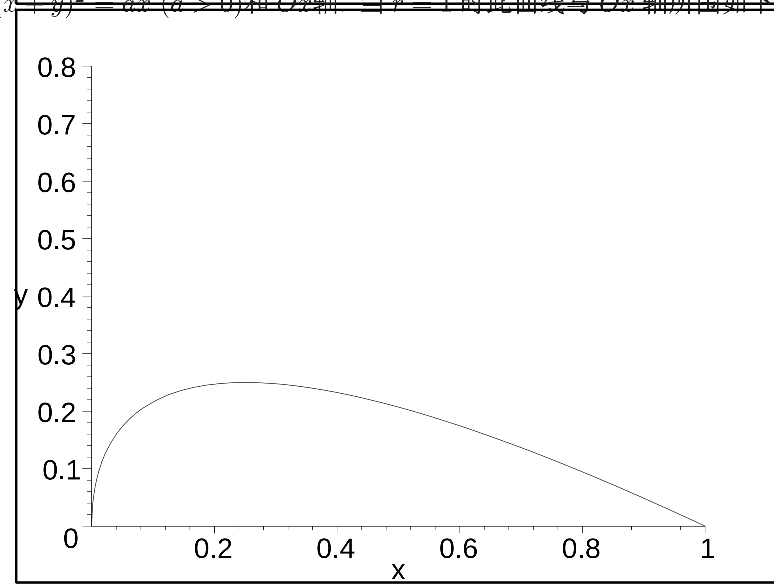
(3) $\displaystyle\int_{\mathscr{S}}(xy^2dydz+yz^2dzdx+zx^2dxdy)$,
$\mathscr{S}=\{(x,y,z):\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\}$, 取外侧$(a,b,c>0)$.

3. 用曲线积分算曲线所围面积.

(1)星形线$x=r\cos^3t, y=r\sin^3t$. 当 $r=1$ 时此曲线如下图:



(2)抛物线$(x+y)^2 = ax$ $(a>0)$和 Ox轴. 当 $r=1$ 时此曲线与 Ox 轴所围如下图:



§ 5　第二型曲面积分

由于多维空间中的“曲面”比较复杂(比“曲线”复杂得多), 对于曲面的一般的讨论是其它课程的任务, 所以这里只讨论$\mathbb{R}^3$ 中的曲面. 偶尔也涉及第二章§1.5 中谈到过的$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$中的($n$维)曲面.

先做一点复习.

为简单起见,设$D=[a,b]\times[c,d]$ 是$\mathbb{R}^2$ 中的有界矩形,或者D是其它类似的“简单”的区域.

① 先复习正则曲面的概念. 设f 是D 到$\mathbb{R}^3$ 的一对一的C^1 类映射, f' 的秩在D 上处处都等于2. 称

$$\mathscr{S}=f(D)=\{f(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)):\ (u,v)\in D\}$$

为 $\mathbb{R}^3$ 中的**正则曲面**, 称f为这个**曲面的正则表示**. 关联着曲面的表示, 说$f(D)$是展布在D上的曲面.

曲面是一个几何对象,只要有一个正则表示,这个曲面就叫做正则的.

② 我们还定义了曲面上的测度. 设$D=[a,b]\times[c,d]$ 是$\mathbb{R}^2$ 中的有界矩形, f 是D 到$\mathbb{R}^3$ 的C^1 类单射, f' 的秩在D 上处处都等于2.设$E\subset f(D)$. 如果E关于映射f的原象A是$\mathbb{R}^2$的可测集,那么就说E是曲面$f(D)$上的可测集,并具有测度(或说面积)

$$|E|=\int_A\Big|\frac{\partial f}{\partial u}\times\frac{\partial f}{\partial v}\Big|\,dudv.$$

这样定义的测度不依赖于映射f的具体形式,它是曲面$\mathscr{S}$自身固有的度量性质.

③ 有了测度,接着就可定义(正则曲面上的)可测函数,及(第一型)积分,一切步骤同第三章中定义 $\mathbb{R}^n$上的积分一样.

由于$\mathscr{S}$上的测度是借助于$\mathbb{R}^2$到$\mathbb{R}^3$的映射定义的.所以$\mathscr{S}$上的积分也可借助于$\mathbb{R}^2$到$\mathbb{R}^3$的同样的映射回到$\mathbb{R}^2$上的积分.具体说来就是下述定理.

设D 是$\mathbb{R}^2$ 中的非空开集, f 是D 到$\mathbb{R}^3$ 的C^1 类单射, f' 在D 上处处秩为2. 设$\mathscr{S}$是由f确定的展布在D 上的曲面, 即$\mathscr{S}=f(D)$. 设h是$\mathscr{S}$上的广义实值函数,定义

$$\xi(u,v)=h(f(u,v))|f'_u\times f'_v|,$$

那么

$$h\in L(\mathscr{S})\Longleftrightarrow\xi\in L(D),$$

且当$h\in L(\mathscr{S})$时

$$\int_{\mathscr{S}}h(P)\,dP=\int_D\xi(u,v)\,dudv.$$

现在讨论第二型曲面积分.

第二型曲面积分的概念,也是为解决实际问题提出的.先举一例.

例 5.1 设在$\mathbb{R}^3$的椭球

$$V=\{(x,y,z):\ ax^2+by^2+cz^2\leqslant 1\}\quad (a,b,c>0)$$

的中心(即坐标原点)处有一个电量为q的点电荷.求它产生的静电场通过V的表面$\mathscr{S}$的电通量Ψ.

由电学定律,$\mathscr{S}$上点$P=(x,y,z)$处的电场强度为向量

$$\vec{E}(P)=\lambda q r^{-3}\vec{r},\quad \vec{r}=\overrightarrow{OP}=(x,y,z),\ r=|\vec{r}|,$$

其中λ是一个正的常数.把 $\mathscr{S}$上点 P附近的小块$\Delta\mathscr{S}(P)$上各点处的场强, 近似认为等于P点处的场强, 把$\Delta\mathscr{S}(P)$的面积记为$|\Delta\mathscr{S}(P)|$. 那么,通过此小块的电通量近似等于

$$\Delta\Psi(P)=\vec{E}(P)\cdot\vec{n}(P)|\Delta\mathscr{S}(P)|,$$

式中$\vec{n}(P)$为曲面$\mathscr{S}$在点 P处的外法向, 即该点处切平面的指向 V外的单位法向量. 根据这个思路, 向V外穿过$\mathscr{S}$的电通量为 $\mathscr{S}$上的第一型曲面积分

$$\Psi=\int_{\mathscr{S}}\vec{E}(P)\cdot\vec{n}(P)\,d\mathscr{S}(P).\tag{5.1}$$

给 $\mathscr{S}$以适当的(局部正则的)表示

$$g(u,v)=(x,y,z)\in\mathscr{S},\quad (u,v)\in D,$$

使得 $\mathscr{S}$在点 $P=g(u,v)$处的外法向与 $(g_u'\times g_v')(u,v)$一致 ($a\times b$ 表示 $\mathbb{R}^3$中的向量 a与向量 b的**外积**, 也叫做**叉乘**). 注意到

$$\vec{n}(P)=\frac{(g_u'\times g_v')(u,v)}{|(g_u'\times g_v')(u,v)|},$$

使用第一型曲面积分的计算公式,得

$$\Psi=\int_D\vec{E}(g(u,v))\cdot(g_u'\times g_v')(u,v)\,dudv.\tag{5.2}$$

不难具体地给出$\mathscr{S}$的适当的表示f并算出Ψ的值(留作习题).

在这个例中,我们谈的是“通过V的表面$\mathscr{S}$的电通量”.“通过一个曲面” 这话按生活的常识不难理解.进一步的抽象导至“曲面的侧”的概念，它是关于所考虑的曲面的一个整体性的概念.

常识中的许多曲面都有“两侧”.我们可以设想在它们的“一侧”涂上红色, 而在它们的“另一侧”涂上蓝色,以示区别.

对于一个展布在有界矩形上的正则曲面$\mathscr{S}$, 设$f : D \longrightarrow \mathscr{S}$是它的正则表示. 那么向量$(f'_u \times f'_v)(u,v)$是点$f(u,v)$处曲面的切平面的法向量，也叫做曲面在点$f(u,v)$处的法向量. 我们把这个向量“指向的一侧”，叫做是曲面由其表示f决定的一侧，简称为**相对于所给的表示f而言的正侧**. 如果我们定义$g(u,v) = f(v,u), \quad (v,u) \in D$, 那么$g$也是$\mathscr{S}$的正则表示，但是由表示 g决定的一侧, 即相对于表示g而言的正侧,恰与由表示f决定的一侧“相反”, “相反”指的是

$$(g'_1 \times g'_2)(u,v) = -(f'_1 \times f'_2)(v,u), \quad (v,u) \in D.$$

这一侧叫做**相对于表示f而言的负侧**.

那么,每个正则曲面都有两个侧.问题出在曲面不正则的情形，或者说得更具体一些，多数问题出在曲面局部地正则而整体上不正则的情形.

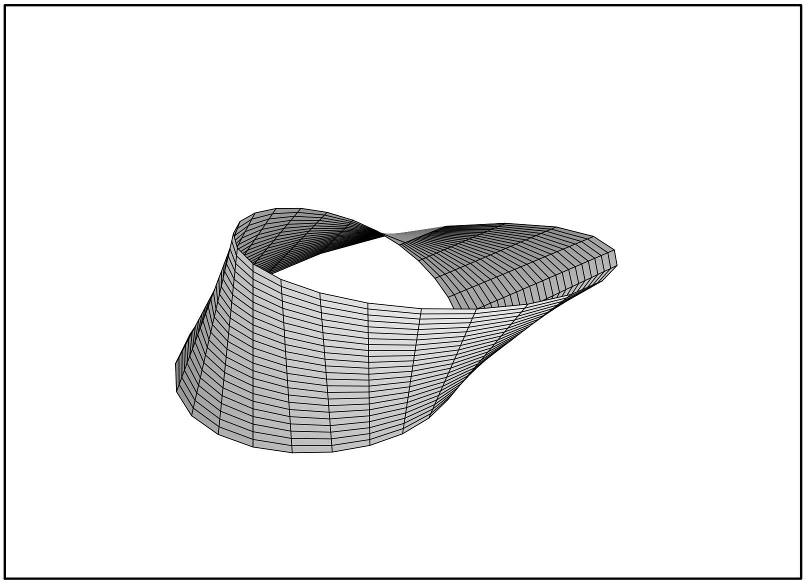
德国数学家A.F.Möbius早在1858年就发现,把一个长纸条的一端扭转180 度再与另一端粘起来,所成的带子就没有两个“侧”.这样的带子,叫作Möbius带.它可由如下的映射 $g(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$给出:

$$\begin{aligned} &x(u,v) = (2 + u\sin\frac{v}{2})\cos v, \quad y(u,v) = (2 + u\sin\frac{v}{2})\sin v, \\ &z(u,v) = u\cos\frac{v}{2}, \quad (u,v) \in [-1,1] \times [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

我们可以用Maple容易地画出这条带子.

```
>  x:=(u,v)->(2+u*sin(v/2))*cos(v);y:=(u,v)->(2+u*sin(v/2))*sin(v);
>  z:=(u,v)->u*cos(v/2);
```

```
>  plot3d([x(u,v),y(u,v),z(u,v)], u=-1..1,v=0..2*Pi);
```



从整体上来看，$g(u,0)=(2,0,u)=g(u,2\pi), u\in[-1,1]$,所以 g不是正则表示. 而且可以进一步证明此Möbius带($g([-1,1]\times[0,2\pi])$)不存在正则表示，也就是说，它不是正则曲面.然而很明显，它可由两个正则曲面“无重叠地”连接而成.

在这条Möbius带中,取$P_0=g(0,0)=g(0,2\pi)$.那么

$$(g'_u\times g'_v)(0,0)=(-2,0,0),$$
$$(g'_u\times g'_v)(0,2\pi)=(2,0,0).$$

可见,没有办法由向量$(g'_u\times g'_v)$决定曲面在点P_0处的“侧”, 这与几何的直观是一致的.

关于“侧”，我们不作严格的数学定义而接受几何的直观,有两个侧的曲面叫做双侧曲面, 而且我们只考虑那些可**由有限个正则曲面无重叠地保持侧的协调一致而连接成的双侧曲面**. 例如,椭球面用过椭球中心的平面可分割成两个正则曲面,它们连接起来的时候可保持侧的协调一致. Möbius带虽然可容易地由两个正则曲面连接而成,但却无法保持它们的“侧”的协调一致.以后把由有限个正则曲面无重叠地保持侧的协调一致而连接成的双侧曲面简称为“由有限个正则曲面连接成的双侧曲面”.

受(5.1),(5.2)启发,我们给出第二型曲面积分的定义如下.

定义 5.1 设$\mathscr{S}=g(D)$是有限个正则曲面连接成的双侧曲面, $g: D\longrightarrow\mathscr{S}$是“分片”正则的表示.用$\vec{n}(P)$代表$\mathscr{S}$上$P$点处由$g$决定的单位法向量,即

$$\vec{n}(P)=\frac{g'_u\times g'_v}{|g'_u\times g'_v|}(u,v),\quad P=g(u,v).$$

设f是$\mathscr{S}$到$\mathbb{R}^3$的映射.若$\vec{f}(P)\cdot\vec{n}(P)$ 在$\mathscr{S}$上有第一型曲面积分,则称

$$\Psi=\int_{\mathscr{S}}\vec{f}(P)\cdot\vec{n}(P)\,d\mathscr{S}(P), \tag{5.3}$$

或等价地

$$\Psi=\int_{D}\vec{f}(g(u,v))\cdot(g'_u\times g'_v)(u,v)\,dudv \tag{5.4}$$

为f沿$\mathscr{S}$的相对于所给的表示g而言的正侧的第二型曲面积分, 记之为

$$\int_{\mathscr{S}}\vec{f}(P)\cdot d\vec{\mathscr{S}}(P)\ \text{或}\ \int_{\mathscr{S}_+}\vec{f}(P)\cdot d\vec{\mathscr{S}}(P).$$

规定f沿$\mathscr{S}$的负侧的第二型曲面积分为

$$\int_{\mathscr{S}_-}\vec{f}(P)\cdot d\vec{\mathscr{S}}(P)=-\int_{\mathscr{S}_+}\vec{f}(P)\cdot d\vec{\mathscr{S}}(P).$$

注 5.1　正侧和负侧, 完全取决于人为选定的曲面的表示形式. 我们把记号 $d\vec{\mathscr{S}}(P)$ 形式地理解为 $\vec{n}(P)d\mathscr{S}(P)$.

同第一型曲面积分一样, 第二型曲面积分也是解决实际问题的工具，不是新的积分论而是$\mathbb{R}^2$上(注意,我们讨论的只是二维曲面)的积分论的另一种应用.

最后引入关于第二型曲面积分的习惯的写法.

定义 5.2　设$\mathscr{S}=g(D)$是有限个正则曲面连接成的双侧曲面, $g:D\longrightarrow\mathscr{S}$是“分片”正则的表示. 设$h$是$\mathscr{S}$到$\mathbb{R}$的有界连续映射.规定

$$\int_{\mathscr{S}}h(x,y,z)\,dydz=\int_{D}h(g(u,v))\begin{vmatrix} y'_u & z'_u\\ y'_v & z'_v\end{vmatrix}dudv,$$

$$\int_{\mathscr{S}}h(x,y,z)\,dzdx=\int_{D}h(g(u,v))\begin{vmatrix} z'_u & x'_u\\ z'_v & x'_v\end{vmatrix}dudv,$$

$$\int_{\mathscr{S}}h(x,y,z)\,dxdy=\int_{D}h(g(u,v))\begin{vmatrix} x'_u & y'_u\\ x'_v & y'_v\end{vmatrix}dudv.$$

现在假设定义 5.1中的$f=(P,Q,R)$是$\mathscr{S}$到$\mathbb{R}^3$的连续映射.那么,根据(5.4)和定义 5.2, 有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathscr{S}}\vec{f}(x,y,z)\cdot d\vec{\mathscr{S}}(x,y,z)\\ &=\int_{\mathscr{S}}P(x,y,z)\,dydz+\int_{\mathscr{S}}Q(x,y,z)\,dzdx+\int_{\mathscr{S}}R(x,y,z)\,dxdy.\end{aligned} \tag{5.5}$$

此式启发我们形式地定义

$$d\vec{\mathscr{S}}(P) = \vec{n}(P)d\mathscr{S}(P) = (dxdy, dydz, dzdx). \tag{5.6}$$

例5.2 设在空间 $\mathbb{R}^3$ 的一个区域 U 中流动着不可压缩的均匀物质(流体), 在点 (x, y, z) 处的流速是 $\vec{V}(x, y, z)$ (假设它只与位置有关而不随时间变化，或者我们只考虑某一瞬时的情况).那么称$(U, \vec{V})$为一个流速场，简称$\vec{V}$为流速场. 设在 U 内有一个正则曲面$\mathscr{S}$，选定其一侧. 流体在单位时间内通过$\mathscr{S}$“所选的一侧”的质量(或作为极限:在一瞬时通过$\mathscr{S}$的质量),叫做通过$\mathscr{S}$所选的一侧的(**瞬时**)**流量**. 假设流体的密度为一个单位，那么同例2类似可见，流体通过$\mathscr{S}$所选的一侧的(瞬时)流量等于$\vec{V}$在$\mathscr{S}$上沿着所选的一侧的第二型曲面积分.

习 题 5.5

1. 设$\mathscr{S}$是以原点为中心,边长为 2 且诸边分别平行于坐标轴的方块的外表面. 求:

$$\int_{\mathscr{S}} (x+y)\, dydz + (y+z)\, dzdx + (z+x)\, dxdy.$$

2. 设$\mathscr{S}$是锥面$\{(x, y, z):\ z = \sqrt{x^2+y^2} \leqslant R\}$的下侧.计算:

$$\int_{\mathscr{S}} x^2 y^2 z\, dxdy.$$

3. 计算流速场$\vec{V} = (y, z, x)$向柱$\{(x, y, z):\ x^2+y^2 < R^2, 0 < z < h\}$外的流量.

4. 计算:

$$\int_{\mathscr{S}_+} (y\, dydz + z\, dzdx + x\, dxdy)$$

其中$\mathscr{S}_+$ 是

$$\mathscr{S} = \{(u\cos v, u\sin v, v):\ a < u < b, 0 < v < 2\pi\} \quad (a > 0)$$

的上侧(即法方向与z轴正方向夹锐角的一侧).

5. 设$\mathscr{S}$ 是长方体$[0, a] \times [0, b] \times [0, c]$的边界的外侧$(a, b, c > 0)$, 并设$f \in C[0, a], g \in C[0, b], h \in C[0, c]$.求

$$I := \int_{\mathscr{S}} (f(x)\, dydz + g(y)\, dzdx + h(z)\, dxdy).$$

6. 解出例 5.1 中的Ψ.

§ 6　Gauss公式　向量场的散度

§ 6.1　Gauss公式

Gauss 公式是Green 公式向$\mathbb{R}^3$ 中的推广. 我们不去叙述关于积分区域和边界的若干相当麻烦的规定, 也不叙述证明(证明完全与Green 公式类似：把多重积分化为累次积分，再使用Newton-Leibniz公式, 留作习题), 只给出公式如下.

Gauss公式　设V是$\mathbb{R}^3$中的一个好的闭的立体，$\mathscr{S}$是它的“表面”，是一个好的闭的双侧曲面. 设$\vec{F}=(P,\,Q,\,R)$ 是从 V 倒 $\mathbb{R}^3$ 的 C^1 类映射.那么沿 $\mathscr{S}$ 外侧

$$\int_{\mathscr{S}}(P,Q,R)\cdot d\vec{\mathscr{S}}=\int_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz. \tag{6.1}$$

我们把这个量叫做向量场 $(V,\vec{F})$ 通过$\mathscr{S}$ 的外侧的通量.

例 6.1　$\mathbb{R}^3$ 中适当的立体V 的体积为

$$|V|=\frac{1}{3}\int_{\mathscr{S}}(x,y,z)\cdot d\vec{\mathscr{S}}(x,y,z).$$

式中$\mathscr{S}$为V的表面，取向外的一侧.

证　在 Gauss 公式中代入 $(P,Q,R)=\frac{1}{3}(x,y,z)$ 就得所需结果. □

例 6.2　求

$$J:=\int_{\mathscr{S}}x^2\,dydz+y^2\,dzdx+z^2\,dxdy,$$

其中$\mathscr{S}=\{(x,y,z):\,|(x,y,z)-(a,b,c)|=R\}$,取外侧.

解　设$\mathscr{S}$ 所围的球为V.那么由Gauss公式

$$\begin{aligned}J&=2\int_V(x+y+z)\,dxdydz\\&=2\int_V(x-a+y-b+z-c)\,dxdydz+2(a+b+c)|V|.\end{aligned}$$

再用Gauss 公式得

$$\begin{aligned}&2\int_V(x-a+y-b+z-c)\,dxdydz\\&\qquad=\int_{\mathscr{S}}(x-a)^2dydz+(y-b)^2dzdx+(z-c)^2dxdy.\end{aligned}$$

由对称性易见

$$\int_{\mathscr{S}}(x-a)^2\,dydz=\int_{\mathscr{S}}(y-b)^2\,dzdx=\int_{\mathscr{S}}(z-c)^2\,dxdy=0.$$

从而$J=\frac{8}{3}(a+b+c)\pi R^3$. □

§ 6.2 向量场的散度

定义 6.1 设 V是 $\mathbb{R}^3$中的不空开集, $F:\ V\longrightarrow\mathbb{R}^3$ 是 C^1 类映射, $F=(P,Q,R)$. 称

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

为向量场 $(V,\vec{F})$ 的散度(divergence), 或$\vec{F}$ 的散度, 记作 $\operatorname{div}\vec{F}$.

使用散度符号,Gauss公式 (5.1) 可写作

$$\int_{\mathscr{S}}\vec{F}\cdot d\vec{\mathscr{S}}=\int_V\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z)\,dxdydz,\tag{6.2}$$

其中 $\vec{F}=(P,Q,R)$. 那么,Gauss公式说的是, 场 $\vec{F}$ 通过立体 V 的边界 $\mathscr{S}$ 的外侧的通量为散度 $\operatorname{div}\vec{F}$在 $\mathscr{S}$ 所围立体 V 上的积分.

设在点 $A\in V$ 处, $\operatorname{div}\vec{F}(A)>0$. 取定充分小的$\delta>0$, 使球

$$B(A;\delta)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ |(x,y,z)-A|<\delta\}$$

的闭包$\overline{B}(A;\delta)\subset V$,且在$\overline{B}(A;\delta)$ 上$\operatorname{div}\vec{F}>0$. 记$\overline{B}(A;\delta)$ 的表面为

$$\mathscr{S}=\{(x,y,z):\ |(x,y,z)-A|=\delta\}.$$

那么, 按Gauss 公式,

$$\int_{\mathscr{S}}\vec{F}\cdot d\vec{S}=\int_{B(A,\delta)}\operatorname{div}\vec{F}dxdydz>0.$$

使$\operatorname{div}\vec{F}>0$ 的点叫场$(V,\vec{F})$ 的“源点”, 使$\operatorname{div}\vec{F}<0$ 的点则可叫做“漏点”.

习惯上也把梯度符号 ∇ 看作一个形式向量(可形式地参与向量运算):

$$\nabla:=\Big(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\Big),$$

而把散度记作点乘的形式:

$$\operatorname{div}\vec{F}=\nabla\cdot\vec{F}.$$

设(V,F) 是数量场, $F\in C^2(V)$. 那么它的梯度场$(V,\nabla F)$ 的散度为

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\nabla F)&=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial F}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial F}{\partial y}\Big)+\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial F}{\partial z}\Big)\\&=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}.\end{aligned}$$

定义

$$\Delta F=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}.$$

称Δ为Laplace 算子. 那么,

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}F)=\Delta F.$$

例 6.3　求点电荷q 产生的静电场的散度.

解　设点电荷位于原点.那么, 根据库仑定律,点$\vec{r}=(x,y,z)\neq(0,0,0)$ 处的电场强度为

$$\vec{F}=\frac{\lambda}{|r|^3}r,\quad |r|=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}},$$

其中λ 为q 的常数倍. 于是

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{F}&=\lambda\Big(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{|r|^3}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{|r|^3}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{|r|^3}\Big)\\&=\lambda\Big[\frac{3}{|r|^3}-3\frac{1}{|r|^4}\Big(\frac{x^2}{|r|}+\frac{y^2}{|r|}+\frac{z^2}{|r|}\Big)\Big]=0.\end{aligned}$$

除q 所在的位置外, 其它点都既不是源点也不是漏点. 那么, 通过任何不包围原点的闭曲面的电通量都是零.

习 题 5.6

1. 写出Gauss公式的证明.

§ 7　$\mathbb{R}^3$ 中的Stokes公式　旋度

§ 7.1　$\mathbb{R}^3$ 中的Stokes公式

设D 是$\mathbb{R}^2$ 中的不空的单连通有界闭集. 所谓D 连通, 指的是D 中任何两点可用全在D 内的有限条正则曲线顺次联结, 所谓D 单连通指的是它的边界 $D\setminus\overset{\circ}{D}$ 是一条连

续闭曲线. 设 g 是 D 到 $\mathbb{R}^3$ 的 C^1 类一对一的映射, g' 在 D 上处处秩为 2. 那么, 由 g 确定了一个展布在 D 上的正则曲面 $\mathscr{S}=g(D)$.

补充如下假定.

设 D 的边界 $\partial D := D\setminus \overset{\circ}{D}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的有限条正则曲线联成的曲线, 它关于 D 取"逆时针方向" (这种描述性语句前面已用过). 规定 $\mathscr{S}$的边界为 $\partial\mathscr{S}=g(\partial D)$. 易见(请自思之) $\partial\mathscr{S}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的有限条正则曲线联成的曲线. 规定 $\partial\mathscr{S}$ '的方向保持与 ∂D' 的方向协调一致.

根据 $\partial\mathscr{S}$ 的这个方向, 我们这样规定 $\mathscr{S}$ 的上侧,使得"逆着 $\mathscr{S}$ 的法方向向 $\mathscr{S}$ 看去, $\partial\mathscr{S}$ 的方向为逆时针方向" (这又是一个描述性语句).

我们大胆地使用一些非数学语言来描述我们的研究对象,目的是节省掉那些实质上并无新内容的麻烦的考证且保持几何的直观. 相信这样做是"得大于失" 的.

现设 $\mathscr{S}$ 上定义着变换 $\vec{F}: \mathscr{S}\to\mathbb{R}^3$,

$$\vec{F}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)),$$

其中 P, Q, R 在 $\mathbb{R}^3$ 的一个包含 $\mathscr{S}$ 的足够大的开集上有连续的偏导数.

Stokes 公式 在上述条件下,沿 $\partial\mathscr{S}$ 的第二型曲线积分与沿 $\mathscr{S}$ 的第二型曲面积分有如下关系:

$$\int_{\partial\mathscr{S}}\vec{F}(x,y,z)\cdot d\overrightarrow{(x,y,z)}=\int_{\mathscr{S}}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

其中,右端形式记法的确切意思是指第二型曲面积分

$$\int_{\mathscr{S}}\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)dydz+\Big(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\Big)dzdx+\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)dxdy.$$

在证明Stokes 公式之前, 我们先说明Green 公式是它的特例. 只要令

$$\mathscr{S}=\{(x,y,0):\ (x,y)\in D\},\quad f=(P,Q,0),$$

代入上面的公式, 我们就得到

$$\int_{\partial D}(P,Q,0)\cdot d\overrightarrow{(x,y,0)}=\int_{\partial D}(P,Q)\cdot d\overrightarrow{(x,y)}=\int_D\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)dxdy.$$

基于这一事实, 我们说, Stokes 公式是Green 公式的"弯曲化" 推广.

Stokes 公式的证明

为简单起见, 我们补充假定表示曲面 $\mathscr{S}$ 的变换 g 是C^2 类的. 当然, 对于Stokes 公式的成立, 这一假定不是必要的.

记

$$g(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)).$$

设 D 的边界 ∂D 有参数表示

$$\partial D=\{h(t)=(u(t),v(t)):\ a\leqslant t<b\}.$$

那么 $\partial\mathscr{S}$ 得到参数表示

$$\partial\mathscr{S}=\{g(h(t)):\ a\leqslant t<b.\}$$

根据定理 2.1

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathscr{S}}P(x,y,z)\,dx&=\int_{(a,b)}P(x,y,z)\,(x'_u u'(t)+x'_v v'(t))\,dt\\&=\int_{(a,b)}(P(x,y,z)x'_u)u'(t)dt+(P(x,y,z)x'_v)v'(t)\,dt\\&=\int_{\partial D}\Big(P(x,y,z)x'_u\Big)du+\Big(P(x,y,z)x'_v\Big)\,dv.\end{aligned}$$

对于右端的第二型曲线积分使用Green 公式, 得

$$\int_{\partial\mathscr{S}}Pdx=\int_D\Big[\frac{\partial}{\partial u}(Px'_v)-\frac{\partial}{\partial v}(Px'_u)\Big]dudv.$$

容易算出

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial u}(Px'_v)-\frac{\partial}{\partial v}(Px'_u)\\&\qquad=(P'_x x'_u+P'_y y'_u+P'_z z'_u)x'_v-(P'_x x'_v+P'_y y'_v+P'_z z'_v)x'_u\\&\qquad=P'_z\begin{vmatrix}z'_u & x'_u\\ z'_v & x'_v\end{vmatrix}-P'_y\begin{vmatrix}x'_u & y'_u\\ x'_v & y'_v\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

那么

$$\int_{\partial\mathscr{S}}Pdx=\int_D\left(P'_z\begin{vmatrix}z'_u & x'_u\\ z'_v & x'_v\end{vmatrix}-P'_y\begin{vmatrix}x'_u & y'_u\\ x'_v & y'_v\end{vmatrix}\right)dudv.$$

于右端使用第二型曲面积分的计算公式,得

$$\int_{\partial\mathscr{S}}Pdx=\int_{\mathscr{S}}P'_z dzdx-P'_y dxdy.$$

同样的计算给出

$$\int_{\partial\mathscr{S}} Qdy = \int_{\mathscr{S}} Q'_x dxdy - Q'_z dydz,$$
$$\int_{\partial\mathscr{S}} Rdz = \int_{\mathscr{S}} R'_y dydz - R'_x dzdx.$$

将三式合并, 得

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathscr{S}} \vec{f}(x,y,z)\cdot d\overrightarrow{(x,y,z)} &= \int_{\mathscr{S}} (P'_z - R'_x)dzdx \\ &\quad + (Q'_x - P'_y)dxdy + (R'_y - Q'_z)dydz \\ &= \int_{\mathscr{S}} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \qquad \square\end{aligned}$$

推论 7.1 若曲面$\mathscr{S}$ 及其边界可由有限个满足上述Stokes 公式条件的小块无重迭地恰当地拼成, 则Stokes 公式依然成立.

推论 7.2 设$V = \{(x,y,z): |x|,|y|,|z| \leqslant M\}\ (M>0)$. 设$f=(P,Q,R)$ 是$V \to \mathbb{R}^3$ 的C^1 类映射. 那么, 条件

$$(*) \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

在 V 处处成立的充分必要条件是 f 沿 V 内任何正则曲线的第二型积分的值只决定于曲线的始点和终点的位置, 也就是说

(∗∗) (在 V 内的)第二型曲线积分与路径无关.

证 由Stokes 公式知, 只需证$(**) \Longrightarrow (*)$.

对任意的 $A=(x,y,z)\in V$, 定义

$$F(x,y,z) = \int_{\vec{OA}} P(u,v,w)du + Q(u,v,w)dv + R(u,v,w)dw.$$

记$A'=(x+h,y,z)$, 其中$h\in\mathbb{R}, |h|>0$ 充分小.那么, 有

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\vec{AA'}}(Pdu+Qdv+Rdw) = P(A).$$

同样地

$$\frac{\partial F}{\partial y}(A) = Q(A), \quad \frac{\partial F}{\partial z}(A) = R(A).$$

于是

$$F'(x,y,z) = (P,Q,R) = f.$$

$\Longrightarrow (*)$. □

§ 7.2　旋度

设$\vec{F}$ 是V 到$\mathbb{R}^3$ 的C^1 类映射, $\vec{F} = (P,Q,R)$. 定义

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)$$

叫做场$(V,\vec{F})$ (或映射$\vec{F}$) 的旋度(rotation).

设在$A \in V$ 处$\operatorname{rot}F(\vec{A}) = \vec{n}$, $|\vec{n}| > 0$. 在过A点,与$\vec{n}$ 垂直的平面上作一个以A 为中心, 以δ 为半径的圆, 使圆周$\mathscr{L}$ 的方向为绕$\vec{n}$ 依右手螺旋循行的方向. 圆的内部记为D, 取指向$\vec{n}$ 的一侧. 当δ 足够小时, $\overline{D} = D \cup \mathscr{L} \subset V$, 且在$D$ 上$\operatorname{rot}\vec{F}$ 与$\vec{n}$ 相当近似, 满足$(\operatorname{rot}\vec{F})\cdot\vec{n} > 0$. 在$D$ 和$\mathscr{L}$ 上使用Stokes 公式, 得

$$\begin{aligned}\textstyle\int_{\mathscr{L}} F(x,\vec{y},z)\cdot d(x,\vec{y},z) &= \int_D (\operatorname{rot}\vec{F})\cdot d\vec{S} \\ &= \int_D (\operatorname{rot}\vec{F})\cdot\frac{\vec{n}}{|n|}dS > 0.\end{aligned}$$

如果把$\vec{F}$ 看成是流体的速度. 那么, $\operatorname{rot}F(\vec{A}) = \vec{n}$ 表示的是流体在点A 处的涡旋状态(包括强度及方向). 这就是旋度一词的物理意义.用$\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$代表三个单位向量.那么形式上

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

所以, 可用叉乘记号表示旋度，即

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \nabla\times\vec{F}.$$

习 题 5.7

1. 利用Stokes 公式计算下列曲线积分.

(1) $\int_{\Gamma} ydx + zdy + xdz,$

其中Γ 为$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与$x + y + z = 0$ 的交线, 方向是: 从Ox 轴正向看去, 依逆时针方向进行.

(2) $\int_{\Gamma} (z - y)dx + (x - z)dy + (y - x)dz,$

其中Γ 是从点$A = (a, 0, 0)$ 经点$B = (0, a, 0)$ 到点$C = (0, a, 0)$ 再回到点A 的三角形.

(3) $\int_{\Gamma} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz,$

其中Γ 是平面$x + y + z = \frac{3}{2}a$与立方体$(0, a)^3$的表面的的交,逆$(1, 1, 1)$ 方向看去,Γ 依逆时针方向进行.

2. 求$\mathbb{R}^2$到$\mathbb{R}^2$的映射ω (在$\mathbb{R}^2$上) 的原函数.

(1) $\omega = \big(10xy - 8y, 5x^2 - 8x + 3\big),$

(2) $\omega = \big((x + y + 1)e^x - e^y, e^x - (x + y + 1)e^y\big).$

3. 求

$$\omega = \Big(\frac{y}{3x^2 - 2xy + 3y^2}, -\frac{x}{3x^2 - 2xy + 3y^2}\Big)$$

在$D = (-\infty, +\infty) \times (0, +\infty)$ 上的原函数.

4. 求

$$\omega = \Big(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}, \frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}, -\frac{xy}{z^2}\Big)$$

在$V = (0, +\infty) \times (0, +\infty) \times (0, +\infty)$ 上的原函数.

5. 设$(\mathbb{R}^3, \vec{V})$ 是速度场, $V(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$. 求场通过

$$\mathscr{S} = \{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x, y, z > 0\}$$

的上侧的流量.

6. 设$\vec{F}$ 是$\mathbb{R}^3$ 到$\mathbb{R}^3$ 的C^2 类变换, $u, v, \phi \in C^2(\mathbb{R}^3)$, $a \in \mathbb{R}^3$. 证明:

(1) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0,$

(2) $\nabla \times (\nabla\phi) = 0,$

(3) $\nabla \cdot \nabla\phi = \Delta\phi,$

(4) $\nabla \cdot (\phi a) = \phi\nabla \cdot a + a \cdot \nabla\phi,$

(5) $\nabla \times (\phi a) = \phi\nabla \times a + \nabla\phi \times a,$

(6)　$\nabla\cdot(v\nabla u)=\nabla v\cdot\nabla u+v\Delta u.$

7. 设$F\in C^1(\mathbb{R}^3)$, $P\in\mathbb{R}^3$. 当$\nabla F(P)$不是零向量时，它的方向垂直于F的过点P的等值面$\mathscr{S}_c$.

索引