第十章　Fourier 积分的有界性和收敛性

10.1　关于球的乘子问题

定理 10.1.5　对于 $n=2,\ 1<p\neq 2<\infty$ 时，$\mathbb{R}^n$ 中单位球（圆盘）的特征函数不是 L^p 乘子。由此推出同样的结论对于 $n\geqslant 3$ 也成立 (根据定理 2.5.16) 。

1　关于三角形“长芽”的讨论

① 三角形的芽（ sprout)

起始三角形 —*零级芽*： ΔABC, 底 BC 长度为 b_0, 高为 h_0 ，顶点 A 在底地的上侧；简记之为 Δ.

任取 $h_1>h_0$. ΔABC 生成两个 *1 级芽*：他们是高为 h_1, 分别以 BC 的一半底为底，顶点与 A 同在 BC 的上侧的两个三角形，位置如图 10.1 所示的 $\Delta_1:=\Delta FAM$ 和 $\Delta_2:=\Delta EMB$.

若 $h_0<h_1<\cdots<h_k,\ k\geqslant 1$, 则归纳地，由 $j-1$ 级芽生出两个 j 级芽， $j=1,\cdots,k$, 得 2^k 个 *k 级芽*， $\Delta_{r_1,\cdots,r_k},\ r_j\in\{1,2\},\ j=1,\cdots,k$. 每个 k 级芽 $\Delta_{r_1,\cdots,r_k}$ 是一个三角形，它的高是 h_k, 它的底是 $k-1$ 级芽 $\Delta_{r_1,\cdots,r_{k-1}}$ 的底的左半（ $r_k=1$) 或右半 $(r_k=2)$, 长度是 $b_k=2^{-k}b_0,\ (k\geqslant 1)$.

② 芽的前臂（ arm)（设 $k\geqslant 1$)

把 k 级芽 $\Delta_{r_1,\cdots,r_k}$ 与生成它的 $k-1$ 级芽的差 $A_{r_1,\cdots,r_k}:=\Delta_{r_1,\cdots,r_k}\setminus\Delta_{r_1,\cdots,r_{k-1}}$ 叫做它的 *前臂* 。它的面积是

$$|A_{r_1,\cdots,r_k}|=\frac{b_{k-1}(h_k-h_{k-1})^2}{2(2h_k-h_{k-1})}=2^{-k}b_0\frac{(h_k-h_{k-1})^2}{(2h_k-h_{k-1})}. \tag{1}$$

③ 芽的后部（ botton)

一个芽的 *后部* 指的是以它的底为上底，以他的侧边往 BC 下侧的延长线为侧边的无下底梯形. 一个矩形，如果完全含在芽的后部中，并且一条边落在此后部一侧边上，一个顶点与此后部的一个顶点重合，另一个顶点落在此后部的另一条侧边上，那么就叫做是芽的 *后矩形* . 显然， k 级芽的后部含在 $k-1$ 级芽的后部中，从而都含在零级芽的后部中。同级芽的诸后矩形显然是两两不交的（除了可能有共同的顶点）.

④ 一个特殊三角形的芽

设 $\varepsilon>0,\ h_k=\varepsilon\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j+1},k=0,1,\cdots$. 令 $A=(0,0),B=(0,\varepsilon),C=(\frac{1}{2}\varepsilon,\varepsilon)$. 以 ΔABC 为零级芽，生出以 h_k 为高的 k 级芽。那么，根据（ 1 ）每个 k 级前臂的面积是

$$|A_{r_1,\cdots,r_k}|=2^{-k}\varepsilon\Big(\frac{\varepsilon}{k+1}\Big)^2\frac{1}{h_{k-1}+\frac{2}{k+1}\varepsilon}<2^{-k}\Big(\frac{\varepsilon}{k+1}\Big)^2,\quad k\geqslant 1. \tag{2}$$

定义全体 k 级芽的并为 $E(\varepsilon,k):=\bigcup\{\Delta_{r_1,\cdots,r_k}:r_j\in 1,2,\ j=1,\cdots,k\}$. 那么， $|E(\varepsilon,k)|$ 是全体 $1\leqslant j\leqslant k$ 级前臂的面积之和加上 $|\Delta ABC|$. 于是根据（ 2 ）

$$|E(\varepsilon,k)|\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon^2+\sum_{j=1}^{k}2^j2^{-j}\Big(\frac{\varepsilon}{j+1}\Big)^2<(\frac{1}{2}+\frac{\pi^2}{6}-1)\varepsilon^2<\frac{7}{6}\varepsilon^2. \tag{3}$$

2　与 Kakeya 针问题相关的讨论

设 R 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个矩形。用 R' 代表与 R 的短边相邻的 R 的两个拷贝 (copies), 使得 $R\cup R'$ 是一个短边与 R 同长，长边为 R 的 3 倍的矩形。

引理 10.1.1　设 $\delta>0$. 存在集合 $E\subset\mathbb{R}^2$, 以及有限个两两不交的矩形 R_j, 使得

(a) $\frac{1}{2}<|E|<\frac{3}{2}$;

(b) $|E|\leqslant\delta\sum_j|R_j|$;

(c) $\forall j,\ \ |R_j'\cap E|\geqslant\frac{1}{12}|R_j|$.

证　使用上一段 ④ 中的的芽. 令 $\varepsilon=1$. 取定正整数 $k>e^{\frac{1}{\delta}}$, 令 $E:=E(1,k)$. 那么根据 (3)

$$\frac{1}{2}=|\Delta ABC|<|E|<\frac{7}{6}. \tag{4}$$

把 k 级芽的斜边长度的最大值记为 ℓ_k. 那么

$$\ell_k\leqslant\frac{\ell_0}{h_0}h_k=\frac{\sqrt{5}}{2}h_k<\frac{3}{2}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j+1}\leqslant 3\log(k+2). \tag{5}$$

在每个 k 级芽 $\Delta_{r_1,\cdots,r_k}$ 的后部取一个长边长度为 $3\log(k+2)$ 的后矩形 R_j ，随意给一个编号 $j\in\{1,\cdots,2^k\}$ 。显然 $R_j'\supset\Delta_{r_1,\cdots,r_k}$. 于是

$$|R_j'\cap E|\geqslant|\Delta_{r_1,\cdots,r_k}|=\frac{1}{2}2^{-k}h_k>2^{-k-1}\log(k+2). \tag{6}$$

容易看出 $2^{-k-1}<R_j$ 的短边长度 $<2^{-k+1}$. 所以，根据 (6)

$$|R_j|\leqslant 2^{-k+1}3\log(k+2)=12\cdot 2^{-k-1}\log(k+2)<12|R_j'\cap E|.$$

同时，根据 (4) 及 k 的取法,

$$\sum_{j=1}^{2^k}|R_j|\geqslant 2^k2^{-k-1}3\log(k+2)>|E|\log(k+2)>\delta^{-1}|E|.$$

□

3　涉及矩形的特征函数的 FT(Fourie 变换) 的讨论

命题 10.1.2　设 R 是中心为原点的矩形， v 是与其长边平行的单位向量。定义半平面

$$\mathscr{H}=\{x\in\mathbb{R}^2:\ xv\geqslant 0\},$$

并定义乘子算子 $S_{\mathscr{H}}$:

$$S_{\mathscr{H}}(f)=\mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}(f)\chi_{\mathscr{H}}).$$

那么 $|S_{\mathscr{H}}(\chi_R)|\geqslant\frac{1}{10}\chi_{R'}$.

证　无妨认为 $R=(-a,a)\times(-b,b),\ 0<a\leqslant b$. 则 $v=(0,1)$. 用 $\mathscr{F}_1$ 和 $\mathscr{F}_2$ 分别代表作用在第 1 个和第 2 个自变量上的一元 FT, 用 χ^1 和 χ^2 分别代表作用在第 1 个和第 2 个自变量上的一元特征函数。那么

$$\begin{aligned}S_{\mathscr{H}}(\chi_R)(x_1,x_2)&=(\mathscr{F}_1^{-1}\circ\mathscr{F}_2^{-1})\Big((\mathscr{F}_1\circ\mathscr{F}_2)(\chi_R)\chi_{\mathscr{H}}\Big)(x_1,x_2)\\&=(\mathscr{F}_1^{-1}\circ\mathscr{F}_2^{-1})\Big((\mathscr{F}_1(\chi^1_{(-a,a)})\mathscr{F}_2(\chi^2_{(-b,b)})\chi^2_{[0,\infty)}\Big)(x_1,x_2)\\&=\chi^1_{(-a,a)}(x_1)\frac{1}{2}(I+iH)(\chi^2_{(-b,b)})(x_2)\end{aligned}$$

于是

$$|S_{\mathscr{H}}(\chi_R)(x_1,x_2)| \geqslant \frac{1}{2}\chi^1_{(-a,a)}(x_1)|H(\chi^2_{(-b,b)})(x_2)| = \frac{1}{2\pi}\chi^1_{(-a,a)}(x_1)\Big|\log|\frac{x_2+b}{x_2-b}|\Big|.$$

$\forall(x_1,x_2)\in R',\ \chi^1_{(-a,a)}(x_1)=1,\ b<|x_2|<3b.$

$$\Longrightarrow\ \Big|\log|\frac{x_2+b}{x_2-b}|\Big| \geqslant \log 2.$$

$$\Longrightarrow\ |S_{\mathscr{H}}(\chi_R)(x_1,x_2)| \geqslant \frac{\log 2}{2\pi} \geqslant \frac{1}{10}. \qquad \square$$

4 单位圆盘乘子有界的必要条件

引理 10.1.4 设 $v_j, j=1,2,\cdots$, 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一列单位向量，半平面 $\mathscr{H}_j := \{x\in\mathbb{R}^2:\ xv_j \geqslant 0\}$. 定义 $\mathscr{H}_j$ 的 Fourier 乘子

$$S_{\mathscr{H}_j}(f) = \mathscr{F}^{-1}\big(\mathscr{F}(f)\chi_{\mathscr{H}_j}\big), \quad j\in\mathbb{N}_+.$$

如果单位圆盘 $B(O,1)$ 的乘子 T:

$$T(f) = \mathscr{F}^{-1}\Big(\mathscr{F}(f)\chi_{B(O,1)}\Big)$$

是 (p,p) 型的 $(1<p<\infty)$，即 $B_p := \|T\|_{(p,p)} < \infty$, 那么对于任何一列有界的紧支撑可测函数 f_j $(j\in\mathbb{N}_+)$ 成立

$$\|\Big(\sum_j |S_{\mathscr{H}_j}(f_j)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\|_p \leqslant B_p\|\Big(\sum_j |f_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\|_p.$$

证 无妨认为诸 f_j 都是无限光滑的。对于 $r>0$, 令 $D_{j,r} := \{x\in\mathbb{R}^2:\ |x-rv_j|<r$. 设 $T_{j,r}$ 是圆盘 $D_{j,r}$ 的 Fourier 乘子，即 $T_{j,r}(f) = \mathscr{F}^{-1}\Big(\mathscr{F}(f)\chi_{D_{j,r}}\Big)$。易见，对于任何紧支撑的无限光滑函数 f，

$$\liminf_{r\to\infty} T_{j,r}(f)(x) = S_{\mathscr{H}_j}(f)(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}^2.$$

于是用 Fatou 引理得

$$\|\Big(\sum_j |S_{\mathscr{H}_j}(f_j)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\|_p \leqslant \liminf_{r\to\infty}\|\Big(\sum_j |T_{j,r}(f_j)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\|_p.$$

令 $g_j(x) = e^{-2\pi i r v_j x} f_j(x)$, 并令 T_r 为圆盘 $B(O,r)$ 的 Fourier 乘子。显然 T_r 与 $T=T_1$ 有同样的有界性（见（ 2.5.15 ）），且

$$T_{j,r}(x) = e^{2\pi i r v_j x} T_r(g_j)(x) \quad j\in\mathbb{N}_+.$$

于是，用定理 4.5.1, 得

$$\begin{aligned}\|\Big(\sum_j |S_{\mathscr{H}_j}(f_j)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\|_p &\leqslant \liminf_{r\to\infty}\|\Big(\sum_j |T_r(g_j)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\|_p \\ &\leqslant \liminf_{r\to\infty}\|T_r\|_{(p,p)}\|\Big(\sum_j |g_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\|_p \\ &= B_p\|\Big(\sum_j |f_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\|_p. \qquad \square\end{aligned}$$

5 定理 10.1.5 的证明

无妨设 $p>2$.

假设 $\chi_{_{B(O,1)}}$ 是 L^p 乘子，乘子范数为 B_p.

任取 $\delta>0$. 设 E 和 R_j 如引理 10.1.1 所给出．记 $f_j=\chi_{_{R_j}}$. 令 v_j 是与 R_j 的长边平行的单位向量，而 $\mathscr{H}_j:=\{x\in\mathbb{R}^2:\ xv_j\geqslant 0\}$. 根据命题 10.1.2,

$$\begin{aligned}\int_E\sum_j|S_{\mathscr{H}_j}(f_j)(x)|^2\,dx&=\sum_j\int_E|S_{\mathscr{H}_j}(f_j)(x)|^2\,dx\\&\geqslant\sum_j\int_E\frac{1}{100}\chi_{R_j'}(x)\,dx=\frac{1}{100}\sum_j|E\cap R_j'|\geqslant\frac{1}{1200}\sum_j|R_j|.\end{aligned}$$

另一方面，用 Hölder 不等式，根据有界性的假设以及引理 10.1.4 和引理 10.1.1 得，

$$\begin{aligned}\int_E\sum_j|S_{\mathscr{H}_j}(f_j)(x)|^2\,dx&\overset{\text{Hölder}}{\leqslant}|E|^{\frac{p-2}{p}}\Big\|\Big(\sum_j|S_{\mathscr{H}_j}(f_j)|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_p^2\\&\overset{10.1.4}{\leqslant}B_p|E|^{\frac{p-2}{p}}\Big\|\big(\sum_j|f_j|^2\big)^{\frac12}\Big\|_p^2\overset{f_j\text{ 的定义}}{=}B_p|E|^{\frac{p-2}{p}}\big(\sum_j|R_j|\big)^{\frac{2}{p}}\\&\overset{10.1.1}{\leqslant}B_p\delta^{\frac{p-2}{p}}\sum_j|R_j|.\end{aligned}$$

于是，得到一个对于小的 δ 不可能成立的不等式

$$\frac{1}{1200}\sum_j|R_j|\leqslant B_p\,\delta^{\frac{p-2}{p}}\sum_j|R_j|.\qquad\square$$