给中学生讲好微积分基本知识[1]

———- 对于讲授全日制普通高级中学教科书（试验本）《数学》第三册（限选 · 理科）（人民教育出版社， 1998 年 12 月第一版）第二、三、四章的建议

北京师范大学数学系　王昆扬

建议把原书第二章改为两章，前一章讲 **极限**, 另一章讲 **连续函数**.

（一）关于 **极限** 部分，结合原书提如下建议

(1)　第 64 页的旁注“本章所讨论的数列一般都是无穷数列”是多余的，宜删去．实际上，后面讨论的都是无穷数列．

关于数列的定义，可参考《数学百科全书》第四卷 784 页关于“序列”的条目．现代的说法：实数列是定义在正整数集上的实值函数．加以形象化的直观的解释和举例，多数学生应能接受．

(2)　在极限理论中，收敛是一个最基本的最重要的概念．课本中却避开了这个概念．在第 67 页上，不使用“收敛”一词而代之以“有极限”，这引出 69 页上的一句话：“例如，数列 $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$ 就没有极限”．那就是说，按照第 67 页最后一行的写法“当 $n \to \infty$ 时， $\frac{1}{n} \to 0$ ”这句话是对的，而“当 $n \to \infty$ 时， $n \to \infty$ ”则是错的．

现代文献中，“发散到无穷”也叫做有极限．建议使用“收敛”一词，并引入“有极限 ∞(无穷，或正无穷)”和“有极限 $-\infty$ (负无穷) ”的定义，以便与“ $n \to \infty$ ”的说法一致，第 71 页题 3（ 3 ）就遇到这样的问题，既然承认 $n \to \infty$ 就没有理由拒绝 $n^2 \to \infty$ ，第 75 页题 2（ 1 ）也遇到这个问题．

(3)　建议给出 **基本列**（也叫 Cauchy 列）的定义．

若数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足条件： **对于任意给定的正数 ε, 总找得到一个正整数 N, 使得对于任意的正整数 m, n, 只要 $m, n > N$, 就成立** $|a_m - a_n| < \varepsilon$, 那么它叫做基本列．

请学生证明：收敛的数列是基本列．

请学生 **承认实数集的完备性：在实数范围内，任何基本列都收敛**．

(4)　介绍“子数列”的概念，并证明“收敛的数列的任何子数列收敛到同一极限”．

(5)　请学生记住实数的定义 (这可在初中二年级的课本中找到)：（在十进制下，不以 9 为循环节的） **无限小数叫做实数，循环小数叫做有理数，不循环小数叫做无理数**. 用极限的观点说明 (或证明) ，循环小数是分数，分数也必定是循环小数．

并根据这个定义证明， **对于任何两个不同的实数 $a < b$, 都找得到有理数 α 和无理数 β, 使得** $a < \alpha < \beta < b$.

(6)　对于实数集合，建议严格叙述“有界”及 **上确界、下确界** 的定义．

设 A 是一个非空的实数集合．如果存在实数 r, 使得 A 的每个元素 a 都不大于 r, 就说 A 是 **有上**

[1]本文经删节发表在《数学通报》， No.6, 2001,39—41

界 的，并把数 r 叫做 A 的 **上界**. 如果 r 是 A 的上界，并且任何比 r 小的数都不是 A 的上界，那么就称 r 为 A 的 **上确界**，记作 $r = \sup A$. 完全对称地定义 **下界** 和 **下确界**. 一个有下界的集合 A 的下确界记作 $\inf A$，它是 A 的下界，且任何比它大的数都不是 A 的下界. 既有上界也有下界的集合叫做 **有界集**.

为了逻辑上的方便，规定空集是有界集；规定无上界的集合的上确界为 ∞, 无下界的集合的下确界是 $-\infty$.

(7) 建议由实数集的完备性出发证明 **任何有上界的不空的实数集都有上确界**； **任何有下界的不空的实数集都有下确界**. 下面给出前一命题的证明.

证 设 A 是不空的实数集，并设 b 是 A 的上界. 任取 $a \in A$. 记 $c = \dfrac{a+b}{2}$. 在 a, c 和 c, b 这两对点中，至少有一对，记之为 a_1, b_1, 满足

$$\text{(i) 存在 } r \in A, \text{使得} a_1 \le r; \quad \text{(ii) } b_1 \text{是 } A \text{ 的上界},$$

且显然 $[a_1, b_1] \subset [a, b],\ b_1 - a_1 = 2^{-1}(b-a)$.

记 $c_1 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$. 在 a_1, c_1 和 c_1, b_1 这两对点中，至少有一对，记之为 a_2, b_2, 满足

$$\text{(i) 存在 } r \in A, \text{使得} a_2 \le r; \quad \text{(ii) } b_2 \text{是 } A \text{ 的上界},$$

且显然 $b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1) = 2^{-2}(b-a)$.

无休止地重复上述步骤, 得一列点对 $a_n, b_n,\ n \in \mathbb{N}^*$, 满足

$$\text{(i) 存在 } r \in A, \text{使得} a_n \le r; \quad \text{(ii) } b_n \text{是 } A \text{ 的上界},$$

且显然 $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n,\ b_n - a_n = 2^{-n}(b-a)$.

易见， $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
0 \le a_{m+n} - a_n &= \sum_{k=1}^{n} (a_{m+k} - a_{m+k-1}) \\
&\le \sum_{k=1}^{n} (b_{m+k-1} - a_{m+k-1}) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{2^{m+k-1}} \le \frac{b-a}{2^{m-1}}.
\end{aligned}$$

因此 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 都是基本列，它们都收敛. 设它们的极限分别为 β_1, β_2. 那么由 $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$, 得知 $\beta_1 = \beta_2$. 把这个数记作 β. 我们来证明， β 是 A 的上确界.

一方面

$$\forall a \in A, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad a \le b_n,$$

令 $n \to \infty$, 得知 β 是 A 的上界. 另一方面，倘 $u < \beta$, 则当 n 充分大时， $u < a_n$. 那么，根据 a_n 的性质 (i), 存在 $r \in A$, 使得 $u < a_n \le r$. 从而 u 不是 A 的上界.

可见 $\beta = \sup A$. 证毕.

(8) 有了前面的准备，就非常容易证明 **单调数列有极限**(注意，极限可以是 ∞ 或 $-\infty$).

(9) 建议由实数集的完备性出发证明 **任何有界的实数列都有收敛的子列**.

证　设有实数列 $A=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 且存在实数 a,b 使得 $a\le a_n\le b$ $(n\in\mathbb{N}^*)$. 我们来证明， A 中有一个收敛的子列.

把 $[a,b]$ 二等分为两个闭区间 $[a,\frac{a+b}{2}]$ 和 $[\frac{a+b}{2},b]$, 从这两个当中必可选出一个，记作 $I_1=[a_1,b_1]$, 使得 I_1 当中含有数列 A 的无限多项.

把 I_1 二等分为两个闭区间 $[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}]$ 和 $[\frac{a_1+b_1}{2},b_1]$, 从这两个当中必可选出一个, 记作 $I_2=[a_2,b_2]$, 使得 I_2 当中含有数列 A 的无限多项.

无休止地重复这一步骤，得到一列闭区间 $I_n=[a_n,b_n]$, $n\in\mathbb{N}^*$, 具有如下性质:

(a) 在 I_n 中含有 A 的无限多项;

(b) $a\le a_n\le a_{n+1}<b_{n+1}\le b_n\le b$,　$b_n-a_n=2^{-n}(b-a)$.

在 I_1 中取 A 的一项 x_{n_1}, 简记作 y_1; 在 I_2 中取 A 的在 x_{n_1} 后面的一项 x_{n_2}, $(n_2>n_1)$, 简记作 y_2. 无休止地重复这一步骤，得到一个数列 $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$, 它有如下性质:

(c) $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 A 的一个子列 (对于每个 $k\in\mathbb{N}^*$, $y_k=x_{n_k}, n_k<n_{k+1}$);

(d) 对于每个 $k\in\mathbb{N}^*$, $y_k\in I_k$.

由 (b),(d) 知， $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是基本列，从而收敛．证明完毕.

(10)　第 69 页的旁注 2 说，若 $|a|<1$, 则 $\lim_{n\to\infty}a^n=0$ ，“这个结论的证明较繁，本书从略”．其实不然，建议给出证明．此处给出一个证法.

证　由于 $|a|<1$, 所以存在正整数 $p<q$, 使得 $|a|<\frac{p}{q}<1$. 任给 $\varepsilon>0$, 取 $N=[\frac{2p}{(q-p)\varepsilon}]+1$, 其中 $[x]$ 代表不超过 x 的最大整数 ($[x]$ 的定义在第 115 页的旁注中才出现，建议提前介绍)，那么当 $n>N$ 时

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n=\frac{1}{\left(1+\frac{q-p}{p}\right)^n}\le\frac{1}{n\frac{q-p}{p}}\le\frac{1}{\frac{2p}{(q-p)\varepsilon}\frac{q-p}{p}}<\varepsilon.$$

从而，当 $n>N$ 时 $|a|^n<\varepsilon$. 可见 $\lim_{n\to\infty}a^n=0$.

(11)　第 71 页给出命题“ $\lim_{n\to\infty}a_n=a,\lim_{n\to\infty}b_n=b\ne0$ 蕴含 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}$ ”，证明从略．其实，这一命题的证明不复杂，是个很好的练习，还是不“从略”的好.

(12)　第 77 页作为标题写道“无穷等比数列 ($|q|<1$) 的和”，通常的说法是“级数的和”，建议叙述 **级数** 以及 **级数的和** 的定义，没有理由回避符号 $\sum$ (讲积分的时候，还要用).

(13)　关于函数的极限，第 81 页 17–21 行（关于变号无穷）的说法，是 50 多年前的陈旧的语句，没有用处，已被自然地淘汰，应删去．同样，第 106 页 8–10 行也应删去.

(14)　关于函数极限的定义，$\varepsilon-\delta$ 语言已成为现代数学和现代自然科学的最基本的语言，不应回避，也没必要回避．即使有的学生一时接受不了，也不可含糊其辞，这是个科学原则问题．何况不少学生是能够也愿意接受的.

(15)　第 92 、 93 页关于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 的观察，稍微改写一下就是严格的证明．希望不要害怕 **严格**. 补上证明， 93 页的旁注就可删掉.

(16)　第 95 页导数第 4 行的话“可以证明，当 x 趋向于无穷大时，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 趋近于一个定数，……”，不知是在怎样的基础起点上说“可以证明”的．如果如 (3) 所说，承认实数集的完备性，那么只要证明数列 $\left\{a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ 是基本列 (见 (3)) 就可以了，而这并不困难．否则，就要从证明实数集的完备性开始，那就不可避免地要追朔到实数的定义．

人们之所以考虑 a_n, 是有历史的和实际的背景的．但从纯分析的角度来看，处理

$$a_n(x):=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,\quad n\in\mathbb{N}^*,\ x\in\mathbb{C}$$

其中 $\mathbb{C}$ 代表复数域，不如处理

$$b_n(x):=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k,\quad n\in\mathbb{N}^*,\ x\in\mathbb{R}$$

更方便，更有意义．例如，要证明 $\{a_n(i)\}_{n=1}^{\infty}$ $(i^2=-1)$ 收敛，好像不如证明 $\{b_n(i)\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛更方便．

建议在承认实数集的完备性的基础上证明：**对于任意的实数（甚至复数）**x, **上述** $b_n(x)$, **当** $n\to\infty$ **时收敛（其极限记作** e^x).

（二）关于 **连续函数** 部分，提如下建议

关于连续函数的性质，原书只给出直观的描述，这很重要，但很不够．对于连续函数的最基本的重要性质宜给出证明，否则与不讲极限的教材没什么两样．

(17)　建议证明：**有界闭区间上的连续函数是有界的**,(函数有界指的是它的值域有界).

证　设 f 是有界闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数．我们用反证法来证明 f 有上界．

假设 f 无上界．

把 $[a,b]$ 二等分为两个闭区间 $[a,\frac{a+b}{2}]$ 和 $[\frac{a+b}{2},b]$. 那么，这两个闭区间中至少有一个，记之为 $I_1=[a_1,b_1]$, 使得 f 在 I_1 上无上界．

把 $[a_1,b_1]$ 二等分为两个闭区间 $[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}]$ 和 $[\frac{a_1+b_1}{2},b_1]$. 那么，这两个闭区间中至少有一个，记之为 $I_2=[a_2,b_2]$, 使得 f 在 I_2 上无上界．

无休止地重复这一步骤，得到一列闭区间 $I_n=[a_n,b_n]$, $n\in\mathbb{N}^*$, 具有如下性质：

(a) f 在 I_n 上无上界；

(b) $a\le a_n\le a_{n+1}<b_{n+1}\le b_n\le b$,　$b_n-a_n=2^{-n}(b-a)$.

由 (b) 断定，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是基本列，从而收敛，及其极限为 c. 那么显然 $c\in[a,b]$. 由于 f 在 c 点处连续，所以存在整数 δ, 使得当 $|x-c|<\delta$ 且 $x\in[a,b]$ 时，$f(x)<f(c)+1$. 另一方面，只要 $n\in\mathbb{N}^*$ 足够大，就可使 $2^{-n}(b-a)<\frac{\delta}{2}$, 并且 $|a_n-c|<\frac{\delta}{2}$. 此时必有 $I_n\subset(c-\delta,c+\delta)$. 于是对于这样的 $n\in\mathbb{N}^*$,f 在 I_n 上有上界 $f(c)+1$. 这与 (a)，f 在 I_n 上无上界矛盾．从而完成了证明．

(18)　建议进一步证明：**有界闭区间上的连续函数有最大值，有最小值**.

证　设 f 是有界闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数．我们来证明 f 有最大值．

根据 (17)，集合 $\{f(x):x\in[a,b]\}$ 有上界，那么根据 (7), 它有上确界，记为 β.

由上确界的定义知，对于每个 $n \in \mathbb{N}^*$, 存在 $x_n \in [a,b]$, 使得

$$\beta - n^{-1} < f(x_n) \le \beta. \tag{$*$}$$

把数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 简记作 A.

根据 (9),A 中含有一个收敛的子列 $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ ，记其极限为 y. 由 $a \le y_k \le b (k \in \mathbb{N}^*)$ 知 $y \in [a,b]$. 由于 f 连续，所以

$$\lim_{k\to\infty} f(y_k) = f(y).$$

那么根据 $(*)$, 知 $f(y) = \beta = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$, 也就是说， f 在 y 点达到最大值. 证明完毕.

(19) 建议证明： **区间上的连续函数取遍中间值**. 这个命题等价于 **设 f 是区间 I 上的连续函数**, $a, b \in I, a < b, f(a) < u < f(b)$. **那么，存在** $c \in (a,b)$, **使得** $f(c) = u$.

证 把 $[a,b]$ 二等分为两个闭区间 $[a, \frac{a+b}{2}]$ 和 $[\frac{a+b}{2}, b]$. 那么，这两个闭区间中至少有一个，记之为 $I_1 = [a_1, b_1]$, 使得 $f(a_1) < u \le f(b_1)$.

把 $[a_1, b_1]$ 二等分为两个闭区间 $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ 和 $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$. 那么，这两个闭区间中至少有一个，记之为 $I_2 = [a_2, b_2]$, 使得 $f(a_2) < u \le f(b_2)$.

无休止地重复这一步骤，得到一列闭区间 $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}^*$, 具有如下性质：

(a) $f(a_n) < u \le f(b_n)$;

(b) $a \le a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n \le b, \quad b_n - a_n = 2^{-n}(b-a)$.

由 (b) 知 (见 (7) 中的证明),$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到同一个极限 $c \in [a,b]$. 于是，根据 f 的连续性,

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) \le u \le \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c).$$

那么 $f(c) = u$. 证毕.

(20) 建议给出区间 I 上的函数 f**一致连续** 的定义：任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $x, y \in I$ 且 $|x-y| < \delta$, 就有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

并证明： **有界闭区间上的连续函数是一致连续的**.

证 设 f 是有界闭区间 $[a,b]$ 上的连数函数. 假设 f 在 $[a,b]$ 上不是一致连续的，那么闭存在 $\varepsilon > 0$, 以及 $a_n \in [a,b], b_n \in [a,b] (n \in \mathbb{N}^*)$, 使得

$$|a_n - b_n| < \frac{1}{n}, \quad |f(a_n) - f(b_n)| \ge \varepsilon.$$

根据 (8), 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 含有一个收敛的子列 $\{x_k = a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. 及其极限为 x. 显然 $x \in [a,b]$. 记 $y_k = b_{n_k}$. 那么由

$$|x_k - y_k| \le \frac{1}{n_k} \le \frac{1}{k}$$

知 $\lim_{k\to\infty} y_k = x$. 于是

$$\varepsilon \le |f(x_k) - f(y_k)| \le |f(x_k) - f(x)| + |f(y_k) - f(x)|.$$

由于 f 在点 x 处连续，令 $k \to \infty$, 上式右端趋于零．这导致 $\varepsilon \le 0$, 这样一个荒谬的结果．从而完成了证明．

（二）关于原书第三章 **导数与微分**，提如下建议

(21)　建议证明 Lagrange 中值定理：　**设函数** f **在区间** $[a,b]$ **上连续，在** (a,b) **处处可导．那么存在** $c \in (a,b)$, **使得**

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

(并做出几何解释．)

证　先考虑特殊情形：　$f(a)=f(b)$.

根据 (18),f 在 $[a,b]$ 达到最大值和最小值．设最大值为 M ，最小值为 m. 如果 $M=m$, 则 f 为常值函数，处处导数为零．

设 $M>f(a)$, 和 $m<f(a)$ 二者之一成立，无妨认为 $M>f(a)$. 此时，存在 $c \in (a,b)$ 使 $f(c)=M$. 然而

$$f'(c) = \lim_{d\to 0+} \frac{f(c+d)-f(c)}{d} = \lim_{d\to 0-} \frac{f(c+d)-f(c)}{d},$$

其中，当 $d>0$ 时 $\frac{f(c+d)-f(c)}{d} \le 0$; 当 $d<0$ 时 $\frac{f(c+d)-f(c)}{d} \ge 0$. 可见 $f'(c)=0$.

在一般情况下，令

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a), \quad x \in [a,b].$$

那么， g 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，并且 $g(a)=g(b)=f(a)$. 根据已证之事，存在 $c \in (a,b)$, 使 $g'(c)=0$, 即

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

(22)　“微分”一词是历史上遗留下来的．从目前已有的文献来看， dx, dy 等等不过是一些记号罢了．正儿八经地定义“微分”，实在没什么意义．抄录 M. Spivak 在《流形上的微积分》(齐民友、路见可译，科学出版社， 1980 年第一版) 第 45 页上的一段话：

“**记号** $\frac{df}{dx}$ **总多少有点儿诱人，它已分别诱发出许多关于** dx **和** df **的定义（通常是无意义的）；其唯一的目的是得出式子** $df = \frac{df}{dx} \cdot dx$. ”

建议 **删掉** 3.7, 143–145 **页**.

（三）关于原书第四章 **积分**，提如下建议

(23)　“不定积分”不如“原函数”更有实在的意义．书中似乎把不定积分看得比原函数重要，化了较大的篇幅．这未必妥当．

《数学百科全书》第三卷 34 页关于“不定积分”的条目中说区间上的一元函数的不定积分“是给定函数 $f(x)$ 在这个区间上的一切原函数的集合”.

课本 169 页说：“我们把函数 $f(x)$ 的所有原函数 $F(x)+C(C$ 为任意常数) 叫做函数 $f(x)$ 的 **不定积分**, 记作 $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

读起来还是百科全书中的说法准确.

其实，《数学百科全书》关于“不定积分”的说法，也只能说是一个“沿袭历史”的说法．我倒觉得 P.L.Wheeden, A.Zygmund 的教科书《 Measure and Integral 》（ 1977 年， New York ）第 98 页中把函数

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

叫做 f 的“不定积分”更为恰当．当然，如果学术界赞成淘汰“不定积分”一词，未尝不是件好事.

(24)　引入定积分概念时, 书中使用的是把区间等分的分法, 使得极限成为数列的极限. 我认为很好. 如果用 2 进等分就更方便：或许下述定义方式更易理解.

设 $n \in \mathbb{N}^*$. 区间 $[a,b]$ 的 2^n 等分的分点是：

$$x_{nk} = a + \frac{k}{2^n}(b-a), \quad k = 0, 1, 2, \cdots, 2^n.$$

小区间

$$\Delta_{nk} := [x_{nk-1}, x_{nk}],\ k = 1, \cdots, 2^n.$$

对于 $[a,b]$ 上的有界函数 f, 定义

$$M_{nk} = \sup\{f(x):\ x \in \Delta_{nk}\}; \quad m_{nk} = \inf\{f(x):\ x \in \Delta_{nk}\}, \quad k = 1, \cdots, 2^n.$$

作和

$$\overline{I}_n = \sum_{k=1}^{2^n} M_{nk} 2^{-n}(b-a), \quad \underline{I}_n = \sum_{k=1}^{2^n} m_{nk} 2^{-n}(b-a), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

易见 (这是 2 进等分的好处),

$$\underline{I}_n \le \underline{I}_{n+1} \le \overline{I}_{n+1} \le \overline{I}_n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

于是，对于有界函数 f, 根据 (8),$\lim_{n\to\infty} \underline{I}_n \le \lim_{n\to\infty} \overline{I}_n$.

如果极限值 $\lim_{n\to\infty} \underline{I}_n = \lim_{n\to\infty} \overline{I}_n$ 则说 f 在 $[a,b]$ 上可积，此极限值为 f 在 $[a,b]$ 上的积分.

(25)　建议证明： $[a,b]$ **上的连续函数可积**.

证　设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续．根据 (20), 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $x, y \in [a,b]$ 且 $|x-y| < N^{-1}$ 时， $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. 那么当 $n > N$ 时,

$$0 \le M_{nk} - m_{nk} \le \varepsilon, \quad k = 1, \cdots, 2^n.$$

从而

$$\overline{I}_n - \underline{I}_n \le \varepsilon(b-a).$$

可见

$$\lim_{n\to\infty} (\overline{I}_n - \underline{I}_n) = 0.$$

这就证明 f 在 $[a,b]$ 可积.

(26) 建议证明微积分基本定理 (Newton-Leibniz 公式): **设 f 在 $[a,b]$ 上可积， F 是 f 的原函数. 那么**

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

证 把区间 $[a,b]\,2^n$ 等分，分点记作 $x_{nk}=a+\frac{k}{2^n}(b-a),\ k=0,1\cdots,2^n$. 那么

$$F(b)-F(a)=\sum_{k=1}^{2^n}\Big(F(x_{nk})-F(x_{nk-1})\Big).$$

根据 (21)(Lagrange 中值定理)，存在 $\xi_{nk}\in(x_{nk-1},x_{nk})$, 使得

$$F(x_{nk})-F(x_{nk-1})=f(\xi_{nk})(x_{nk}-x_{nk-1}),$$

从而

$$F(b)-F(a)=\sum_{k=1}^{2^n}f(\xi_{nk})(x_{nk}-x_{nk-1}).$$

那么，使用 (24) 的记号，

$$\underline{I}_n\le F(b)-F(a)\le\overline{I}_n.$$

令 $n\to\infty$, 得所欲证者.

上面各条目的论证中多次提到 无休止地重复这一步骤，希望通过多次练习掌握并熟悉这种在高等数学中常用的论证方法，可称之为 $\aleph_0$(**阿列夫零）次归纳论法**.