



◇ 北京 曾云乔(学生) 胡华一(学生)
指导教师 常毓喜

食堂内部某些时段人流量相对集中,易造成拥挤,该现象在各个学校食堂中普遍存在.本文以北京四中高中部食堂为例,对校内学生午餐就餐情况从各个维度进行记录,通过全校范围内发放调查问卷统计学生用餐喜好及排队情况,以实地调查的方式记录实时人流量、排队时间、服务时间等数据,先整理分析;再进一步建立数学模型,将数据代入求解,最终制定解决这一问题的初步方案,提出相关建议.

1 绪论

1.1 研究背景

北京四中的午餐采取按年级错峰就餐的形式,具体安排如下.

11:35 高三就餐 11:50 高二就餐

12:05 高一就餐

上午最后一节课结束时间为 11:35,上述时间为该年级最早允许的始就餐时间,学生可自主选择延后就餐,12:35 食堂关门.食堂套餐窗口和自选窗口总数为 11 个,其中套餐窗口为 8 个,自选窗口为 3 个.虽然学校采取了错峰就餐的形式,但食堂内部某些集中时段仍出现拥挤现象.由于不同学生对食物选择偏好等差异,某些窗口排队时间较长,某些窗口没有人排队.窗口开设和就餐时间的安排上有待完善.

1.2 研究目的

帮助学生尽量节省排队时间,提高就餐效率与秩序,减轻拥堵状况,让更多的学生能够吃到自己喜欢的食物.此外,通过深入研究与数学建模,讨论并提出优化方案,增强研究性思维,体会数学在生活中的应用.

1.3 研究的主要内容和研究方法

1.3.1 研究问题

在现有就餐时间安排的前提下,如何安排自选窗口和套餐窗口的数量,从而实现每位学生的排队时间最短?(每位学生排队时间指排队时间的平均值)

1.3.2 研究方法

问卷调查法:通过微信小程序的形式在全校范围内发放调查问卷,了解学生对套餐窗口与自选窗口的选择意愿,对就餐时段安排、窗口设置的合理性的满意程度等.

实地研究法:实地调查收集各时段人流量,对窗口服务与排队时间进行现场统计.

(调查时间为 2021 年 3 月 1,12,15,17,18,19 日的 11:40—12:20,共六天,文中数据均为六天原始数据的平均值.)

模型构建法:分析本学校各个因素对就餐排队情况的影响,通过构建柯西不等式这一数学模型,将数据代入并分析,提出优化方案.

2 数据的收集与分析

2.1 套餐窗口与自选窗口人流量

2.1.1 调查问卷结果(共 108 份)

表 1 问卷调查选餐情况

套餐窗口	61
有时套餐,有时自选(大概各一半)	34
自选窗口	13

$$\frac{\text{选择套餐窗口人数}}{\text{选择自选窗口人数}} = \frac{61+17}{17+13} = 2.6.$$

2.1.2 实地统计结果

表 2 实地调查选餐情况

时间	11:40	11:42	11:44	11:46	11:52	11:54	11:56	11:58
套餐人数	44.5	20.5	6.75	2.8	47	37	41.4	22.4
自选人数	17	5	3.5	1.4	14.2	12.2	8.8	3.4
比例	2.62	4.1	1.93	2	3.31	3.03	4.71	6.59
时间	12:00	12:08	12:10	12:12	12:14	12:16	12:18	
套餐人数	9.2	47.5	40.5	41	28.5	17.75	23	
自选人数	2.2	14.25	14.25	8	5	4.5	7.5	
比例	4.18	3.33	2.84	5.13	5.7	3.94	3.07	

说明:1)对应时间点的人数为隔两分钟测一次每分钟走向套餐(自选)窗口的人数,人数为多天实地统计结果后取平均值,故有小数出现.

2)基于本研究的目的——尽量缓解特定时段内购饭区域的拥挤情况,在分析数据时删去了部分数据:

① 各年级就餐起始时间(包括 11:50 和 12:06,由于此时购饭区域内上一批学生已买完饭,无拥挤现象).

② 临近下一年级的就餐时间及全校就餐结束时间(包括 11:48,12:02,12:04,12:20,以上时间段内无拥挤现象).



选择套餐窗口人数
选择自选窗口人数 = 3.55.

由于调查问卷的样本量为 108, 小于实地调查的样本量, 且通过图 1 可以看出, 排队时间也会影响窗口的选择. 为了最大限度遵循学生意愿, 故本文参考问卷调查结果中的人数比例.

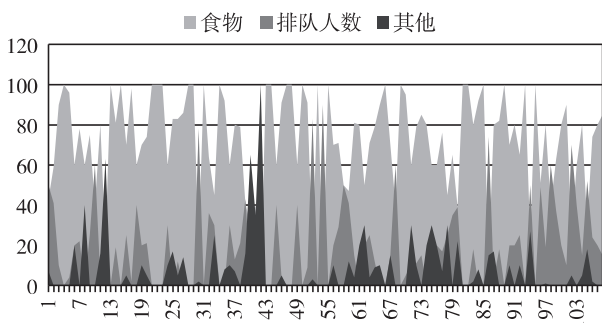


图 1

2.2 原窗口设置合理性研究

表 3 调查问卷对排队时的人流量满意程度评价

满意程度 x	0	1	2	3	4	5
$P(x)$	0.009	0.009	0.018	0.028	0.073	0.064
满意程度 x	6	7	8	9	10	
$P(x)$	0.119	0.092	0.193	0.119	0.257	

表 4 调查问卷原窗口合理程度评价

合理程度 y	0	1	2	3	4	5
$P(y)$	0.028	0.018	0.064	0.055	0.064	0.128
合理程度 y	6	7	8	9	10	
$P(y)$	0.174	0.064	0.147	0.110	0.147	

注: 表 3、表 4 中数据均保留三位有效数字.

由表 3 和表 4 计算可得, $E(x) = 7.284$, $E(y) = 6.335$, 原窗口设置合理程度约为 63%, 学生对于原窗口设置的评分偏低, 有待提高, 且部分参与调查者在问卷中提出“在人流高峰时间段自选窗口可以多开一个”的建议. 根据评估结果与学生提议反馈可知, 改变窗口设置具有实施的合理性与可行性.

3 假设

- 1) 食堂工作人员的出饭速度相同;
- 2) 学生拿饭和刷卡的速度相同.

4 数学建模

4.1 模型内容

设: m = 选择套餐窗口人数 * 套餐窗口每人平均服务时间; n = 选择自选窗口人数 * 自选窗口每人平均服务时间; x_1 为套餐窗口数; x_2 为自选窗口数.

已知 $x_1 + x_2 = 11$, 求 x_1, x_2 的值, 使得 $\frac{m}{x_1} + \frac{n}{x_2}$

的值最小.

4.2 数据代入计算

由柯西不等式: $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$, 变形可得

$$\left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}\right)(x+y) \geq (a+b)^2.$$

当 $a > 0, b > 0, x > 0, y > 0$ 时, 有 $\left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}\right) \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$, 当 $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ 时, 等号成立. 说明: 此处的 $a^2 = m, b^2 = n$, 即 $a = \sqrt{m}, b = \sqrt{n}$. 由此求得对应的 x_1 和 x_2 的值, x_1, x_2 取整数解, 具体取法将在 4.3.1 中说明. m, n 的值如表 5 所示.

表 5 m, n 数值表

时间	11:40	11:42	11:44	11:46	11:52
m 值	3 659	1 086.5	263.25	14	4 277
n 值	2 091	235	192.5	32.2	1 278
时间	11:54	11:56	11:58	12:00	12:08
m 值	2 923	2 873	954.24	981.96	3 182.5
n 值	1 708	822.8	144.5	88	1 377.98
时间	12:10	12:12	12:14	12:16	12:18
m 值	2 502.9	2 250.9	1 385.1	500.55	46.25
n 值	1 262.55	544	313.35	272.25	345

求出 m 与 n 的平均值分别为 $\bar{m} = 1 792.69$, $\bar{n} = 713.81$.

4.3 数据分析

4.3.1 取整问题

选择套餐窗口和自选窗口的人数比例: 调查问卷结果为 2.6; 实地调查结果结果为 2.51, 即选择套餐窗口人数明显多于自选窗口. 所以在对 x_1, x_2 取整时, 采取 $x_2 = [x_2], x_1 = 11 - [x_2]$ 的办法.

4.3.2 求解 x_1, x_2 的值

将 m, n 的平均值代入, 并采用上述的取整方法

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 11, \\ \sqrt{\frac{1 792.69}{x_1}} = \sqrt{\frac{713.81}{x_2}}, \end{cases} \text{ 求出 } \begin{cases} x_1 = 7, \\ x_2 = 4. \end{cases}$$

4.3.3 误差分析

1) 由于第四节课下课时间为 11:35 (即高三用餐时间), 调查者无法第一时间前往食堂, 故实地统计时间段为 11:40—12:20, 缺失了 11:35—11:40 之间的高三人流相对集中时间段的数据.

2) 有少数学生在走向套餐窗口后, 再次回到自选窗口买饭, 可能在统计时将其遗漏或错误归类.

3) 实地调查时间持续较短, 数据具有一定的偶



然性.

5 得出方案

5.1 拟合函数

根据所得数据制表(如表6),并用 Excel 拟合出函数解析式,图2是套餐窗口平均人流量与平均排队时间的关系($y=4.869 2x+21.115$, 决定系数 $R^2=0.796 1$).图3是自选窗口平均人流量与平均排队时间的关系($y=6.993 2x+13.819$, 决定系数 $R^2=0.786 9$).

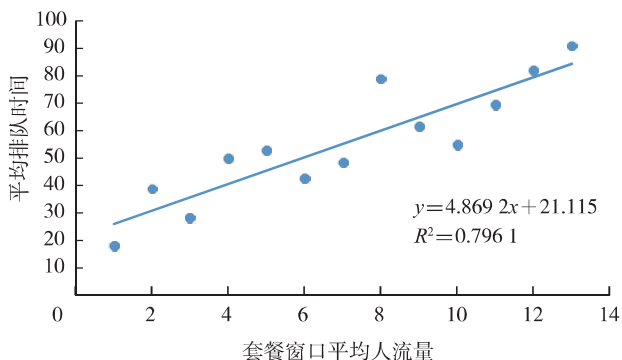


图2 套餐窗口平均人流量与平均排队时间的关系

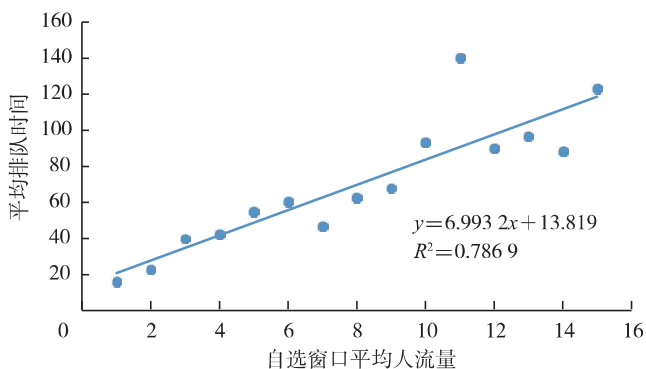


图3 自选窗口平均人流量与平均排队时间的关系

表6 套餐窗口、自选窗口的排队买饭时间

时段	11:40	11:42	11:44	11:46	11:52	11:54	11:56	11:58
套餐窗口 用时/s	82	53	39	5	91	79	69.4	42.6
自选窗口 用时/s	123	47	55	23	90	140	93.5	42.5
时段	12:00	12:08	12:10	12:12	12:14	12:16	12:18	
套餐窗口 用时/s	50.1	67	61.8	54.9	48.6	28.2	2	
自选窗口 用时/s	40	96.7	88.6	68	62.67	60.5	46	

5.2 方案验证

5.2.1 验证思路

假设选择套餐窗口和自选窗口的人数不变,用套餐(或自选)窗口总人数除以新的窗口数量(即 x_1 ,

x_2),得出新的套餐(或自选)各个窗口人流量平均值,分别代入到对应的函数解析式中.

5.2.2 数据代入

表7 套餐(或自选)窗口的原(或新)排队时间

	原排队时间	新排队时间	减少率
套餐	55.2	41.9	24.1%
自选	69.8	53.9	22.8%

由表7可知,经过调整窗口设置,套餐和自选窗口排队时间平均值均有一定程度的减少,减少率在20%以上,效果较好.

6 反思与改进

6.1 反思

本文在统计与分析数据时尚存在一些误差(上文中提及),可能导致结果精确度有偏差.且本文得出的方案仅基于理论层面进行讨论,未进行实地实践来检验方案的真实可行性.

6.2 改进与提升

1) 排队时间的统计

由于套餐购饭区域内有小食的售卖(并不是每个学生都会购买),可在实地统计学生买饭排队时间时,减去这部分的购买时间,仅对所有学生都购买的主食进行统计,使得提出的方案更加具有实际意义——尽量缓解特定时段内购饭区域的拥挤情况.

2) 可对各年级错峰吃饭的时间设置进行进一步研究.

表8 错峰吃饭满意程度

满意程度 x	0	1	2	3	4	5
$P(x)$	0.019	0.019	0.074	0.046	0.065	0.074
满意程度 x	6	7	8	9	10	
$P(x)$	0.111	0.037	0.287	0.046	0.185	

注:表8中数据均保留3位有效数字.

由表8可知,满意程度的数学期望值为 $E(x)=6.423$,学生对于错峰吃饭时间设置的满意程度在65%左右,仍有提高空间,有待进一步研究.

7 结语

随着计算机技术的进步和各种计算软件的普及,数学在人们生活中的应用越来越广泛,通过数学建模可以帮助我们更加快速和准确地解决生活中的实际问题.这次建模提升了与伙伴间的协作能力、资料收集整理能力、数据的归纳能力和自主学习与表达能力.相信我们在以后的学习和生活中会更加主动地应用数学知识与思维,思考和解决遇到的现象和问题.

(作者单位:北京市第四中学)