

商场活动策划方案如何进行决策

北京师范大学（珠海）附属高级中学 刘英 黄海燕 吴文

一、教学目标

1. 在具体情境中融入概率统计与数列知识,加深对必然事件概率,互斥事件、相互独立事件的概念理解及巩固概率的运算方法,会用特征根法求数列三项递推关系式的通项以及累加法的运用;

2. 通过生活中的问题情境,启发学生进行数学分析,发现问题情境中的数学关系,提出数学问题。

3. 从具体问题中抽象出数学问题,并且通过推理形成模型,体会从特殊到一般的思想方法,推出模型的一般表达式,并且能够用数学语言对建模过程中的得到的结论或结果进行表述,从而解决问题,并理解建模意义。

4. 通过建模的过程,体会数学思想方法的运用,利用身边熟悉背景引入问题,提高学生学习兴趣,体会数学的广泛应用,通过数学建模活动培养学生的数学学科素养。

二、教学中地位和作用分析

新课标(2017版)设计了“数学建模和数学探究活动”主题,指出自主探究和合作交流是学生的重要学习方式;对开展建模活动按照不同那个层次提出不同要求,旨在通过建模活动,学生能够数学的思考解决实际问题,培养自身的数学素养。基于新课标,本节课利用递推数列有关的概率综合问题为背景,开展建模活动,学生在探究过程中,可以加深对数学知识的理解,学生通过自主分析、思考、探索、总结、发现规律,学生亲历建模过程,培养发现问题,分析问题,解决问题的能力,体会数学思想方法。通过建立数学模型,逐渐培养学生的数学应用意识和创新意识,提升学生的综合素质。

三、教学重点: 数学模型的建立,以及如何利用模型进行决策;

教学难点: 从实际情境中抽象出数学模型;

四、学情分析

学生的知识基础: 学生掌握的的概率的相关知识,能判断两个事件是否为相互独立事件;学生掌握了由递推关系求数列通项的方法,并且会用累加法求数列的和,因学生学习递推关系最高到三项递推,故对问题的活动背景进行了限定,符合学生的认知水平。学生掌握了数学建模的基本流程,能进行数学思考。

学生特点: 授课学生现阶段为高二学生,数学基础较好,具备一定的推理论证能力,对数学建模的几个流程比较熟悉,学生善于发现问题,可以进行探究性的学习与交流,但是数学抽象能力较弱,数学模型的建立需要进行引导;

学习困难: 从问题情境中抽象出数学模型,以及求解模型的一般表达式比较困难;

五、教学方式及教学手段

教学方式: 本节课在教学中采取“引导+合作探究”教学方式;

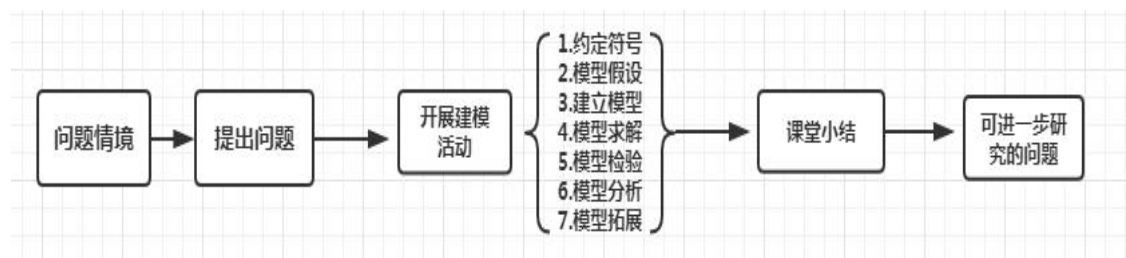
在学生现有的认知水平,启发学生思考,提出问题,在教师的引导下,学生相互合作相互交流,小组合作进行模型求解。

从具体问题情境中抽象出数学模型采用教师引导,模拟商场游戏环节,学生直观感知,体验过程,抽象出数学模型。由方案二过渡,通过方案三将模型由特

殊推广到一般，从具体到抽象，层层引入，推出模型的一般表达式，突出重点，突破难点；

教学手段：PPT 和 GeoGebra（简称 GGB）；PPT 展示教学环节及演示；通过 GGB 软件的计算功能对模型进行求解，模型推广部分利用 GGB 软件进行运算，更好地解决问题。

六、教学整体思路



七、教学过程

（一）问题情境

A 商场做活动，推出“玩游戏，赢大奖”的活动，客户可根据抛掷硬币的结果，操纵遥控车在方格上行进，若遥控车最终停在“第 50 格”，可获得免单大奖，落在第 49 格获得九折优惠券，方格图上标有第 0 格、第 1 格、第 2 格、……、第 50 格。遥控车开始在第 0 格，客户每抛掷一次硬币，遥控车移动一次，若抛掷正面向上，遥控车向前移动一格，若抛掷出反面，遥控车向前移动两格，直到移动到第 49 格，或者第 50 格时，游戏结束。

B 商场也要搞一次类似的活动，现在召开部门策划活动方案探究会议，活动背景为抛掷一枚骰子，出现奇数点走 1 格，出现偶数点走 2 格；

（1）如果你是部门经理你会提出哪些方案？

（2）如果你是商场决策者，你会怎样从众多方案中做出决策呢？

师生活动：（学生提出方案，可能提出不同想法，对学生提出的方案进行引导和总结，选择其中可进行研究的方案进行探究）

预设方案一：照搬 A 商场活动，利用掷骰子出现奇数点和偶数点可能性相同的心理，吸引顾客参加活动，奇数点走 1 格，偶数点走 2 格；其余和 A 商场活动要求相同；

预设方案二：如果出现奇数点和偶数点的可能性相同，对于商场支付的免单大奖会不会对公司的利益有所损伤，如果把骰子换成质地不均匀的，比如出现偶数点概率为 $\frac{1}{3}$ ，奇数点概率为 $\frac{2}{3}$ ，让公司的利润更大。

预设方案三：我们调整骰子的质地，使商场支付免单大奖不超过总数的 20%，这样就能保证公司利益。

预设方案四：游戏活动设置的 50 格有点多，消费者就会觉得烦了，减少格子让游戏时间缩短。

预设方案五：商场制定的活动目的一个是吸引顾客，一个是为了增加收益，那我们需要制定一个免单率，这样既能吸引顾客也能增加商场收益。

（设计意图：若学生思维活跃，善于表达，可组织学生提出方案，否则，可直接给出方案，让学生讨论，通过仿照 A 商场的活动，引导同学们能够在实际情境中提出更多的问题，培养学生发现问题的能力，因为课时有限，选择其中可

以进行研究的问题进行研究。)

(二) 师生探讨, 开展数学建模活动

1. 分析问题

师: 同学们给了很多建议, 面对给出的五个方案, 若你是决策者该怎样做出决策呢?

生: 不知所措, 无从下手 (预设);

师: 大家想一想, 作为顾客, 这个游戏最吸引你的是什么?

生: 免单大奖!

师: 你作为决策者不但要从顾客的角度考虑, 也要从经营者的角度考虑, 免单大奖可以设置的太多吗? 可以设置的太少吗?

生: 太多经营者会亏损, 太少不能吸引顾客;

师: 那多少合适呢? (停顿), 免单率这么重要, 就可以成为我们决策的一个重要依据, 那么研究问题明确了, 也就是研究免单率的表达式, 以及影响免单率的因素是什么?

(设计意图: 面对实际问题, 如何选择解决问题的方向对于学生来说是一个难点, 需要教师进行引导)

2. 模型准备

(1) 模型假设

免单率实际上就是小车走到第 50 格的概率, 小车走到第 50 格需要从第 48 格过去, 走到第 48 格需要从第 46 或 47 格过去, 通过分析发现小车到达第 50 格的概率, 受到后面 0 到 48 个格子的概率影响。

小车经过每一个格子的概率是相互独立的, 向前走一格或者两格取决于抛掷的骰子是奇数点还是偶数点, 奇数点和偶数点出现的概率取决于投掷质地是否均匀; 为了之后的研究, 我们进行模型假设。

①抛掷骰子出现奇数点和偶数点概率满足古典概型;

②小车经过每一个格子都是相互独立事件;

③若骰子的质地均匀, 出现奇数点和偶数点概率相同; 若骰子质地不均匀, 则满足奇数点和偶数点的概率和为 1。

(2) 约定符号

n : 表示格子的序号 ($0 \leq n \leq 50, n \in N$)

P_n : 表示小车走到第 n 格的概率, ($0 \leq n \leq 50, n \in N$)

p : 骰子质地不均匀时, 出现奇数点的概率

$1-p$: 骰子质地不均匀时, 出现偶数点的概率

(设计意图: 通过师生探究, 作出假设和符号预定, 为后面模型建立做准备)

3. 建立模型

方案一: 学生和老师一起探讨, 模拟游戏过程, 假设骰子质地均匀, 出现奇数点概率为 $\frac{1}{2}$, 出现偶数点概率也为 $\frac{1}{2}$; 让小车从初始位置出发, 小车经过第 0 号格

子为必然事件，概率为 1，走到第一号格子的概率为 $\frac{1}{2}$ ，走到 2 号格子有两种途径，每种途径概率均为 $\frac{1}{2}$ ，则走到第 2 号格子概率为 $\frac{3}{4}$ ，走到第三号格子也有两种途径，和 2 号格子类似，以此类推得到如下分析：

通过分析题意：当 $n=0$ 时， $P_0=1$ ，

$$\text{当 } n=1 \text{ 时， } P_1 = \frac{1}{2},$$

$$\text{当 } n=2 \text{ 时， } P_2 = \frac{1}{2}P_0 + \frac{1}{2}P_1$$

.....

$$\text{当 } n=49 \text{ 时， } P_{49} = \frac{1}{2}P_{48} + \frac{1}{2}P_{47}$$

$$\text{当 } n=50 \text{ 时， } P_{50} = \frac{1}{2}P_{48}$$

由当 $1 \leq n \leq 48$ 时，概率的表达式为 $P_{n+1} = \frac{1}{2}P_n + \frac{1}{2}P_{n-1}$

（设计意图：建立模型是本节课的难点，教师采取了启发引导的方式，首先对方案一进行研究，通过玩一遍这个游戏，从第 0 个格子出发，奇数点和偶数点概率相同时，进行研究，归纳出该问题的数学模型，为后面模型的一般化做铺垫，突破难点。）

4. 模型求解

方案一的模型求解：由题意知 $P_{n+1} = \frac{1}{2}P_n + \frac{1}{2}P_{n-1}$ ， ($1 \leq n \leq 48$)；

$$\text{得 } P_{n+1} - P_n = -\frac{1}{2}(P_n - P_{n-1})$$

所以， $\{P_n - P_{n-1}\}$ 是等比数列，其中 $1 \leq n \leq 49$ ，首项 $P_1 - P_0 = -\frac{1}{2}$ ，公比为 $-\frac{1}{2}$ ；

$$\text{故 } P_n - P_{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1};$$

$$\begin{aligned} P_n - P_0 &= P_1 - P_0 + P_2 - P_1 + \cdots + P_n - P_{n-1} \\ &= -\frac{1}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right] \end{aligned}$$

$$P_n = 1 - \frac{1}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right] = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n, (1 \leq n \leq 49);$$

$$\text{故 } P_{50} = \frac{1}{2}P_{48} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2}\right)^{48};$$

由于 $P_{50} \approx \frac{1}{3}$ ，则在整个游戏过程中获得免单的可能性为 $\frac{1}{3}$ ；获得九折优惠卡的概

率约为 $\frac{2}{3}$.

生：（分享求解结果）在求解过程中，遇到 $\frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^{48}$ 这个表达式不会求解，因为这个值很小，我们小组讨论后认为可以忽略不计，由于 $P_{50} \approx \frac{1}{3}$ ，则在整个游戏过程中获得免单的可能性为 $\frac{1}{3}$ ；获得九折优惠卡的概率约为 $\frac{2}{3}$.

师：在数学问题求解一般是准确的解，但是数学建模解决实际问题时，求出的解尽可能的最优，有时是一个范围，有时是一个近似解，这个结果可以帮助我们进行决策。刚刚我们对方案一进行了求解，得到免单可能性为 $\frac{1}{3}$ ；获得九折优惠卡

的概率约为 $\frac{2}{3}$ ，有同学说这个方案对商场的利润会造成损失，免单的人太多，大家看一下方案二，会不会减少商场损失？

方案二：学生自主探究，小组合作

通过对方案一的研究，学生小组合作，研究方案二对应的模型；

若抛掷骰子的质地不均匀，出现奇数点的概率为 $\frac{2}{3}$ ，偶数点的概率为 $\frac{1}{3}$ ，则此时赢得免单的概率有多大？

解：由方案一模型可以得到此时概率 $P_{n+1} = \frac{2}{3}P_n + \frac{1}{3}P_{n-1}, (1 \leq n \leq 48)$ ；

$P_{n+1} - P_n = -\frac{1}{3}(P_n - P_{n-1})$ 得 $\{P_n - P_{n-1}\}, (1 \leq n \leq 49)$ 以 $P_1 - P_0 = -\frac{1}{3}$ 为首项，以 $-\frac{1}{3}$ 公比

数列；此时 $P_n - P_0 = -\frac{1}{4} \left[1 - (-\frac{1}{3})^n \right]$ ，推出 $P_n = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^n$ ；

$$P_{50} = \frac{1}{3}P_{48} = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^{48} \right)$$

故 $P_{50} \approx \frac{1}{4}$ ，此时赢得免单的概率约为 $\frac{1}{4}$ ；

探究结果分析：（学生分享）

生：通过我们小组的运算发现，改变骰子的质地，可以影响免单概率，我们小组做了一个猜测：奇数点出现的概率越大，出现免单概率越小；

师：我们同学的猜测是否是正确的呢？通过方案一和二，我们同学猜测免单率受到骰子出现奇数点的概率影响，那么我们设骰子出现奇数点的概率为 p ，出现偶数点的概率为 $1-p$ ，方案三中， p 为多少时免单率不超过 20%呢？同学们进一步探讨；

方案三：学生自主探究，小组合作

解：设骰子出现奇数点的概率为 p ，出现偶数点的概率为 $1-p$ ，

模型为 $P_{n+1} = pP_n + (1-p)P_{n-1}$

$P_{n+1} - P_n = -(1-p)(P_n - P_{n-1})$, 数列 $\{P_n - P_{n-1}\}$ ($1 \leq n \leq 49$) 是以 $P_1 - P_0 = -(1-p)$ 为首

项, 以 $-(1-p)$ 为公比的等比数列; 此时 $P_n - P_0 = -\frac{p-1}{p-2} [1 - (-1-p)^n]$,

$$P_n = -\frac{1}{p-2} + \frac{p-1}{p-2} [-1-p]^n,$$

$$P_{50} = (1-p)P_{48} = \frac{1-p}{2-p} + \frac{(1-p)^2}{2-p} [-1-p]^{48}$$

$P_{50} \approx \frac{1-p}{2-p} \leq \frac{1}{5}$, 解得 $p \geq \frac{3}{4}$ 时, 商场为使顾客赢得免单概率不超过 20%, 此时奇

数点出现的概率不能小于 $\frac{3}{4}$;

探究结果分析:

(1) 通过刚才的探究得出了免单概率的一般公式:

$$P_{50} = (1-p)P_{48} = \frac{1-p}{2-p} + \frac{(1-p)^2}{2-p} [-1-p]^{48},$$

通过这个公式, 我们可以任意设定奇

数点出现的概率, 计算免单率, 也可以通过免单率, 去设定奇数点出现的概率, 为决策提供帮助;

(2) 当 $n=48$ 时, $P_{50} \approx \frac{1-p}{2-p} = 1 + \frac{1}{p-2}$, 可看成关于 p 的函数, 随着 p 的增大,

P_{50} 在减小; 验证了同学的猜想;

(设计意图: 通过对前面三个方案的研究, 把模型由具体推广到一般, 学生体会由具体到抽象的过程, 体会分析问题重要思想方法, 发现规律, 为之后的做决策做准备;)

利用信息技术对模型进行求解和检验

通过 GeoGebra 软件进行求解 (下面简称 “GGB”)

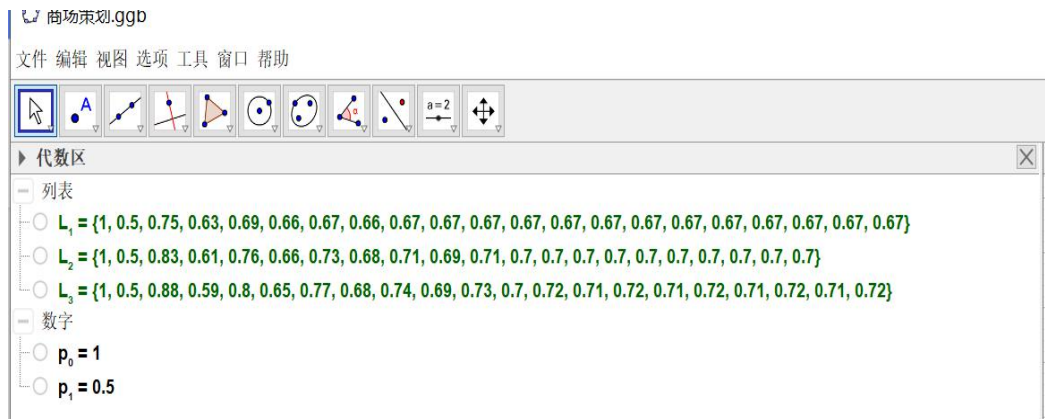
教师输入上面的例子, 利用迭代列表功能可以快速得出所求概率;

下图三个列表分别表示: $P_0=1, P_1=\frac{1}{2}$ 时,

(1) 列表 1 表示奇数点和偶数点各出现概率为 $\frac{1}{2}$ 时, 迭代 20 次的情况;

(2) 列表 2 表示奇数点出现概率为 $\frac{2}{3}$, 偶数点出现概率为 $\frac{1}{3}$, 迭代 20 次情况;

(3) 列表 3 表示奇数点出现概率为 $\frac{3}{4}$, 偶数点出现概率为 $\frac{1}{4}$, 迭代 20 次情况;



通过软件计算，大家可以看出什么规律吗？（师生探讨）

通过 GGB 软件计算结果如下：

$$P_{50} = \frac{1}{2} P_{48} = 0.67 \times 0.5 = 0.335$$

$$P_{50} = \frac{1}{3} P_{48} = 0.7 \times \frac{1}{3} = 0.233$$

$$P_{50} = \frac{1}{4} P_{48} = 0.72 \times 0.25 = 0.18$$

从 GGB 运算过程中分析（1）与模型中运算结果近似一致的；

（2）从数据来看，方案一中数据从第 8 个格子开始概率趋于稳定；第二组数据从第 12 个格子概率趋于稳定；第三组数据从第 14 个格子概率趋于稳定；

方案四：基于 GGB 软件对概率的求解，方案四得到了解决，奇数点出现的概率越大，格子下限的数值越大；格子数设计有下限，低于格子数的下限，免单率受到格子数的影响，超过下限，免单率不受格子数影响。

（设计意图：对于建立的数学模型，可以手动求解，也可以借助信息技术快速求解，借助 GGB 软件的计算功能，可以进行更复杂运算，为模型的推广做准备）

5. 解决问题

问题：如果你是商场的决策者，你应该如何作出决策？

生：三个方案中把奇数点出现的概率变大，免单率就会变小；结合几个方案一和二出现的免单率比较大，如果商家给出一个面单率，可运用方案三给出的模型，求解合适的奇数点出现的概率；

生：方案四中，游戏的格子数的设定，也受到奇数点概率的影响，奇数点出现概率越大，格子数的下限值就越大，超过这个值后免单率不随格子的变化而变化；
.....

结论：

- （1）奇数点出现概率越大，出现免单率越小；
- （2）若想要达到预期目标，免单率可控，奇数点出现概率越大，游戏设置格子数需要越多，若达到格子数下限，其余可以根据游戏时间设定格子数上限；

奇数点出现的概率	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$
概率开始稳定的格子数	第 8 个格子	第 12 个格子	第 14 个格子
超过格子下限概率稳定值	0.67	0.7	0.72
免单率	0.335	0.233	0.18

6. 模型拓展:

基于 GGB 软件强大的计算功能, 我们可以把我们刚才研究的问题进行拓展。

拓展(1) 投掷一枚质地均匀的骰子, 出现 1, 2 点向前走一格, 出现 3, 4 点时向前走两格, 出现 5, 6 点向前走三格, 走到 49 格赠送九折券, 走到 50 格赢免单大奖, 你能求出此时免单的概率为多少吗?

拓展(2) 若把(1)改为“走到 37 格赠送 9 折优惠券, 38 格赢取免单大奖, 你能求出此时免单的概率吗?”

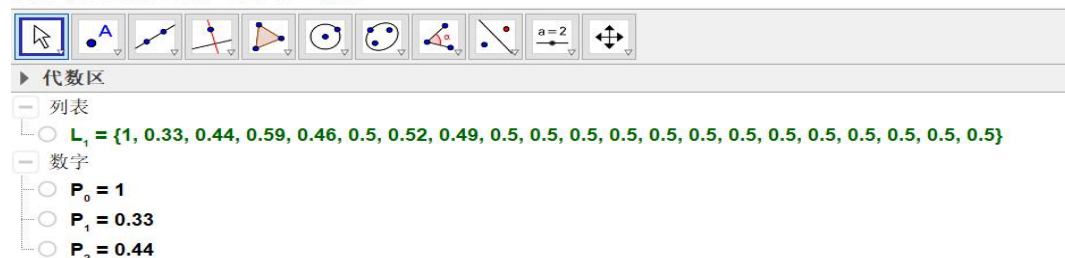
解: 借助刚才模型建立的经验得:

$$P_0 = 1, \quad P_1 = \frac{1}{3}, \quad P_2 = \frac{1}{3}P_0 + \frac{1}{3}P_1 = \frac{4}{9};$$

...

$$P_{n+2} = \frac{1}{3}P_{n-1} + \frac{1}{3}P_n + \frac{1}{3}P_{n+1}$$

文件 编辑 视图 选项 工具 窗口 帮助



通过软件计算: 从第 9 个格子后, 小车经过每个格子概率均为 0.5,

$$P_{50} = \frac{1}{3}P_{47} + \frac{1}{3}P_{48} = \frac{1}{3}(0.5+0.5) = \frac{1}{3},$$

所以此时赢取免单大奖的概率为 $\frac{1}{3}$;

$$(2) P_{38} = \frac{1}{3}P_{36} + \frac{1}{3}P_{37} = \frac{1}{3}(0.5+0.5) = \frac{1}{3}, \text{ 所以此时赢取免单大奖的概率为 } \frac{1}{3};$$

(设计意图: 通过对游戏中小车走的格子数进行改编, 使得游戏更加具有趣味性, 通过 GGB 软件的计算功能, 不需要我们进行复杂的运算, 就可以发现问题的规律, 解决问题)

师: 我们同学的方案五, 这个免单率多少合适? 怎么解决这个问题呢?

生: 要结合成本和销售量进行决策;

生: 这种问题应该结合实际情况考虑, 比如: 五一, 十一的黄金周期间, 是顾客消费的黄金时期, 出现奇数点的概率可以适当增大, 保证商场利润;

生: 如果是新冠肺炎的疫情复工复产期间, 为了刺激消费, 出现奇数点的可能性适当的增加, 或者增加优惠券, 优惠券和免单大奖同时设置, 比例多少能最大限度刺激消费呢?

师: 同学们说的很好, 这个问题我们可以课下进一步探讨;

(设计意图: 本节课的教学重点是推出免单率受到影响的一个因素, 就是概率 P , 怎样制定方案研究 P 具体多大才可以, 那么方案五给学生提供一些思路, 供课下进一步进行探究)

(四) 课堂小结

(学生总结及反思, 从数学模型分析角度, 数学思想方法等方面进行总结)

师：通过今天的学习，你学到了什么？如果你是商场的商场的活动决策者，你应该如何做出决策呢？

生：数学模型的建立可以帮助我们解决一类问题；信息技术的应用可以简化运算；

生：在实际生活中，我们遇到一些运算问题，可以取近似值，可以帮助我们做判断；

生：如果我是商场经理，根据实际市场需求，制定一个免单率，然后了解顾客愿意玩游戏的时间长度，设置游戏格子数量，直接运用今天的数学模型，进行游戏的设置。根据实际情况，制定商场的促销计划。

.....

师：原来生活中处处都可以应用到数学，大到航天航空，军事国防，小到生活中衣食住行，通过数学建模，我们可以更加科学严谨的做出决策，这就是我们数学的魅力！

（五）可进一步研究问题

（1）基于今天的模型讨论，设计更加有趣的游戏方案；

（2）顾客愿意接受玩游戏的时间有多长？

（3）商场优惠券发布与免单大奖的比例如何设置，才能刺激消费又能使商场利润最大？

（六）板书设计

标题
一. 研究问题：
二. 数学建模
（1）
（2）
（3）
（4）
（5）
（6）

（3）模型求解
方案一
方案二
方案三
小结

学生活动展示区
