《数学模型的优化与推广：停车点的选定》教学设计

北师大（珠海）附中 黄海燕 吴文 刘英

一、教学目标

提升学生“数学建模”的核心素养。包括：强化数学建模的基本步骤的运用；理解数学模型的意义；运用数学语言或引用模型结果说明问题； 熟练运用数学思想方法解决复杂问题，如化归法、类比迁移法等；掌握数学模型的优化与推广时基本思路——实践与反思；能够根据问题的实际意义检验结果，完善模型，解决问题。让学生感受数学用在实处的乐趣，培养学生在运用知识解决实际问题时的创新能力；培养求实的科学态度。

二、教学内容

北师大版新教材必修一第八章数学建模共三小节：走近数学建模、数学建模的主要步骤、数学建模活动的主要过程。笔者认为“数学建模的主要步骤”一节可以分为多个课时，根据每个学校学生的水平设计不同的建模题目与教学设计针对性地夯实学生在建模中各部分的能力。

本节课设计为“数学建模的主要步骤”小节中的第二课时。学生已经掌握数学建模的主要步骤，本节课结合具体事例帮助学生巩固数学建模的主要步骤，同时通过实践与反思对“模型优化与推广”的能力进行强化，为后期小组实践打好基础。

教学重点：学生完成完整的数学建模过程，引导学生结合生活中实际情景从简入繁，逐步完成模型的优化与推广。

教学难点：应对学生在开放性问题上的不同解答；引导建模过程中模型优化与推广的自然发生。

三、学情分析

学生掌握基本初等函数的定义、性质；学习数学的习惯仍停留在“听讲、做题、解题”的阶段；缺少解决开放性问题的经验，思维较为固化，思考开放性问题需要引导。

学生已经完成“走近数学建模、数学建模的主要步骤”两课时的学习。学生了解数学建模的概念、主要步骤，但对模型建立的操作不够熟练，模型优化的思路不够清晰。

四、教学方法与教学手段

教学方法：“问题串”式教学方法

1. 以“问题串”的形式引导学生用自己的经验，所学的知识阐述自己的想法，抓住主要元素并将实际问题转化为数学问题；
2. 根据数学建模一般步骤解决基础模型后，引导学生开拓思路讲问题放入实际中检验，结合学生的疑问引导学生逐步将问题生活化，以此对模型进行优化与推广。

教学手段：本节课主要借助 GeoGebra 软件绘制函数，完成模型中最值的求解。简化学生在含绝对值的式子最值求解中绘图的困难，让课堂的重点回归到模型优化与推广本身。

五、教学过程设计

课前回顾：数学建模的主要步骤

情境创设：

学校计划开设班车接送学生，行车路线如图所示。为缩短整体行车时长，校车不进行“站站停”的形式，只在行车路线中选取若干个合适的地点让学生上下车。现拟定在港湾大道路段（如图）选定一个停车点，请问选哪里最好？

（一）分析问题

Q1:在规划的路线中，要选取“最好”的停车点，请问怎样才算“最好”？

预设学生活动：

——中间的；大家走的路都差不多；看哪个站附近人数多（尽量多人少走路，最值的角度）→整体考虑：总路程少。

设计意图：引导学生的发散思维，体会“定义与标准”是模型的根本，并选取其中一个角度入手建立模型。

Q2：如何知道所有同学的总路程？你需要做什么准备。请提出合理的假设,让问题简化并定义变量。

预设学生活动：——统计同学住址；测量站与站的距离：测量每个同学从下车点走回家的距离等。

（二）模型准备

模型假设：

1. 为方便测量距离，方便上下车，假设上车点定在公交站；
2. 为节省调查时间，不妨假设每个站点附近住一位同学，并忽略各个同学到站点的距离，即每位同学的步行路程为所住站点到上车点的距离；
3. 化曲为直：将弯曲的路线抽象为直线，各站点为直线上的点，任意两点 a、b 间距离为 $|a-b|$；

定义变量：

O：数轴原点附中站，其中行车路线方向为数轴正方向

A、B、C、D、E、F：分别为唐家市场站、唐家站、白埔路口站、中山大学站、鸡山南站

a，b，c,d,e,f：附中站到各站点的距离

P：上车点

x：附中站到停车点的距离

y：所有学生到停车点的距离总和

经导航查询,附中站到各站点的距离分别为：唐家市场站 A（a=2.2），唐家站为 B（b=2.6),白埔路口站为 C(c=3.3),中山大学站为 D(d=3.5),鸡山站为 E(e=4.7),鸡山南站为 F(f=5.2)

设计意图：引导进行合理假设，强调“模型假设”是搭建模型的“脚手架”，帮助限定讨论范围，简化问题并保障实际问题到数学问题转换的科学性、完备性。强调使用字母表示变量，便于模型的修改与推广应用。

（三）建立模型

Q3:根据模型假设，若上车点为P,对应数值为x，请用以上变量表示所有同学的步行总距离 y 。

学生活动：——则有

$$y=|x-a|+|x-b|+|x-c|+|x-d|+|x-e|+|x-f|,\ x\in R$$

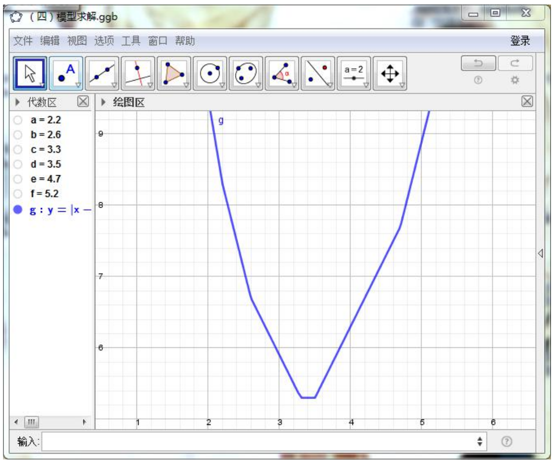
问题转换为：求使得 y 值最小时 x 的取值范围。

设计意图：“化曲为直”的模型假设让二维地图上的两点间距离转化为数轴上的两点距离 $|x-a|$，强调生活问题转换为数学问题时数学术语的应用，如定义域、最值等。

（四）模型求解

Q4:已知一个函数，如何求最值？

预设学生活动：——作图，由图得当 $x\in[3.3,3.5]$即上车点定在白埔路口至中山大学站中间时，有总距离 y 最小。



设计意图：引导学生说出求最值的几种方法：作图、单调性；点拨含绝对值符号的函数作图的原理——分段绘制，借助信息技术辅助作图（geogebra 软件作图），减少学生在作图部分的困难，避免模糊课堂重点，也可以让学生体会数学建模的核心是数学知识与思想方法，而信息技术在求解数学模型时有巨大的优越性。

（五）解决问题：模型检验与实际结果

Q5:根据模型求解的答案，结合实际生活经验，停车点应该设置在哪里？

预设学生活动：——[C,D]范围内都可以——中间：比较公平；——两个公交站，方便上下车；等等。

【结论】 在模型假设的前提下，停车点应定在中间白埔路口或者中山大学站。

设计意图：引导学生体会数学模型的最优与生活中的最优未必一致，而不同的答案有着背后深层的人文含义。让学生体会到数学建模在生活中的“落地感”，渗透多角度思想与为他人着想的人文思想。

（六）模型推广

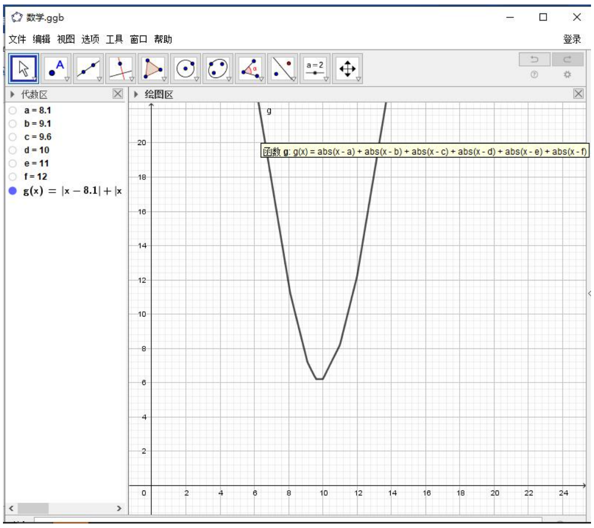
Q6:模型推广：若沿着港湾大道继续取六个公交站，假设不变的前提下，设置第二个停车点。请问第二个上车点应该定在哪里？

9


预设学生活动：——按照上题的解法，操作一遍。

——重新测量每个地点到附中的距离，修改 a，b，c，……，f 等点的数值即可。

令 a=8.1；b=9.1；c=9.6；d=10；e=11；f=12，则如图



追问:观察函数的图形、最值产生的范围，与上题有什么共同的地方?

预设学生活动：——函数都是分段函数，图形都是折线图，最小值都在“中间”产生。

再追问:如果沿着港湾大道前进，再取6个公交站，在6个公交站中间设置一个上车点，请猜想，设在哪里好？请检验你的猜想。

预设学生活动：——中间。尝试改动几个数字，发现最佳上车点保持在中间。

【推广结论1】

模型假设不变的前提下,任取路线上的六个站点,以依次设为A~F。则模型最优解在[C,D]之间。且结论与站点间距离无关。

设计意图：引入常用的模型推广思路：类比推演。控制变量寻找相似的场景使用模型，发现答案中的共性，从而提炼模型的核心结论。由于新高考中删除绝对值不等式，也为了避免过多解释模糊了模型优化的重点，因此此处不进行“最值为何产生在中间”的科学解释，仅供有兴趣的同学进行课后探究。

Q7:请结合实际生活，思考以下结论在使用时的局限性。

模型假设：
1.每个站点附近只住一位同学；
2.上车点为公交站点，每位同学的步行距离=所住站点到停车点的距离；
3.化曲为直：导航距离=等于两站间步行距离

推广结论**1**：
模型假设不变的前提下，任取路线上的六个站点，以依次设为**A~F**。则模型最优解在**[C,D]**之间。且结论与站点间距离无关。

预设学生活动：

——每个站附近不可能只住一位。

——有的路线附近只有 5 个站怎么办。而且住唐家市场的同学没必要坐校车，走路就能到学校了。

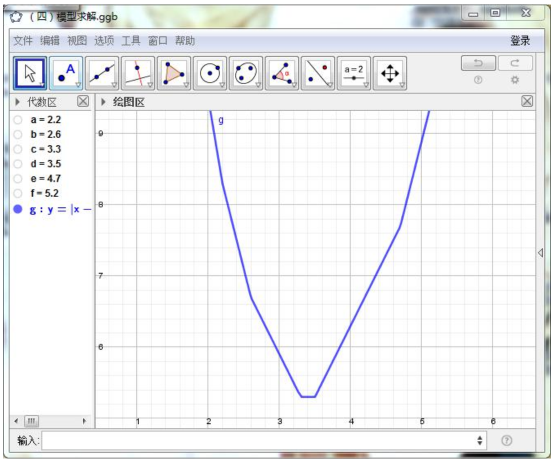
——步行距离等于站点距离不准确。不过要统计每个人步行距离又很麻烦。

——导航距离=站点距离也不准确，如果两站之间有小路就不用走那么长了。

设计意图：常用优化思路：实践与反思。让学生学会从生活实践中质疑模型假设与结论。并选取争议较大的部分进行模型优化与推广。

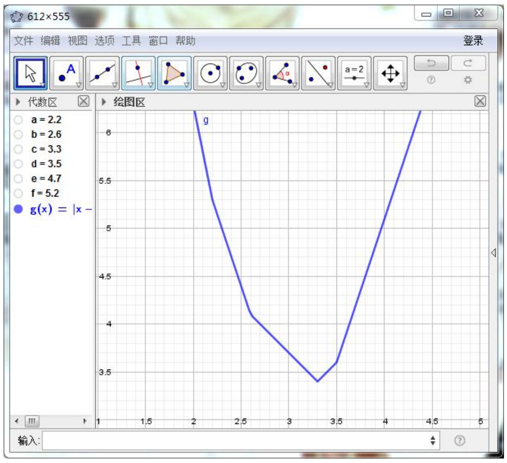
Q8:若推翻“取 6 个站的假设”：如果我取 5、4、3 个站，结果一样的?

GeoGebra 软件绘图检验



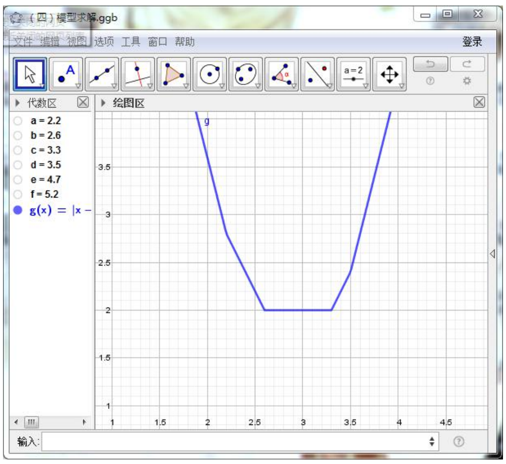
“取 6 个站”:A、B、C、D、E、F 时

最佳上车点为：C/D



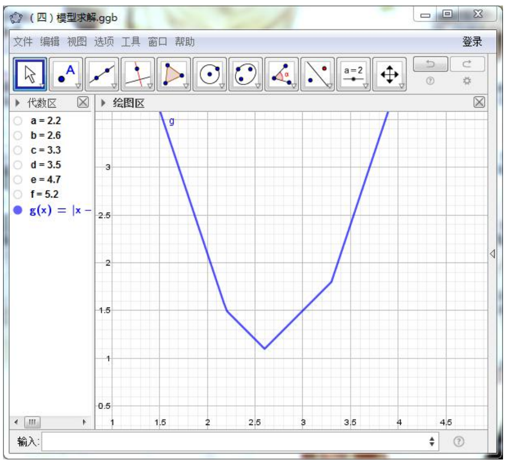
取 5 个站”：A、B、C、D、E 时

最佳上车点为：C



“取 4 个站”:A、B、C、D 时

最佳上车点为：B/C



取 3 个站”：A、B、C 时

最佳上车点为：B

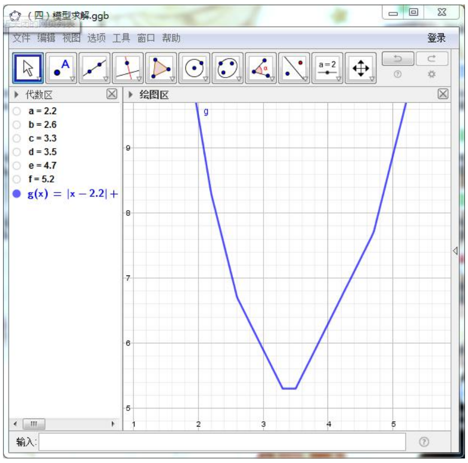
【推广结论 2】

若各站出发的同学都是 1 人，上车点定在**“中间站点”**（若有奇数个站点，则取中间站点，若有偶数个则取中间两站点中的一个）时，使得所有同学步行总距离最小，且结论与各站点间距离无关。

Q9:若推翻“只住 1 人”的假设：如果站 A 有两个人住在附近，模型有何变化？请在你的模型基础上进行修改，并阐述参数“2”对结果的影响。

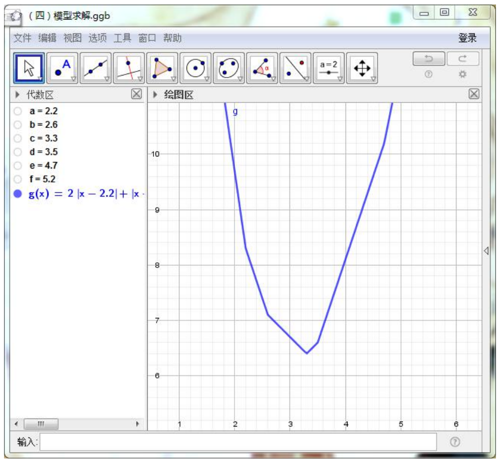
预设学生活动：——将模型修改为 $y=2|x-a|+|x-b|+|x-c|+|x-d|+|x-e|+|x-f|$，则此时根据 GeoGebra 软件绘图可知，最佳上车点在 C 点白埔路口了！

同理假设 A 站附近住有 3 人、4 人，则结果如下。



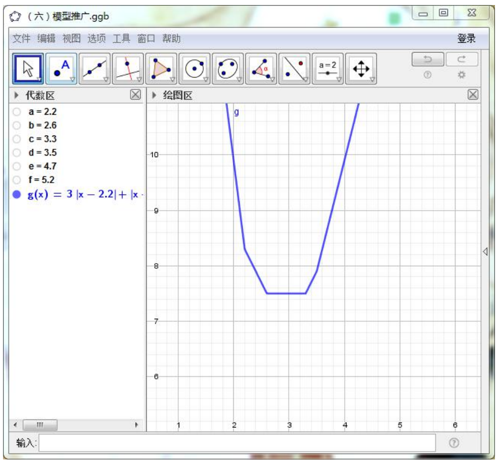
1A、1B、1C、1D、1E、1F 时

最佳上车点为：C/D



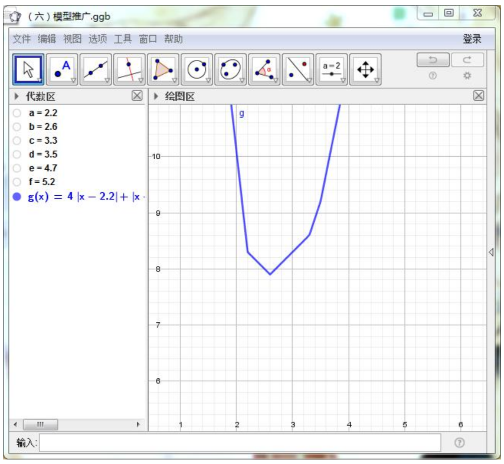
2A、1B、1C、1D、1E、1F 时

最佳上车点为：C



3A、1B、1C、1D、1E、1F 时

最佳上车点为：B/C



4A、1B、1C、1D、1E、1F 时

最佳上车点为：B

预设学生活动：——当 A 点增加一个人，最佳上车地点向右挪一点。所以从每个站出发的

人数改变时，结果是会跟着改变的，A 出发的人越多，这个站就越重要，最佳上车点就要向他靠近。

数学建模中，我们把影响单个因素重要性的系数叫做“权重”。

追问：增加权重之后，能不能保持最佳上车点在“中间站点”的说法。

——能！从某些角度看，最佳上车点还在中间。增加 A 站出发人数时，可以理解为站点个数增加了，所以 A 站有两人时，我可以理解为 A1,A2,B,C,D,E,F,共 7 个站点，则最佳上车点依然是中间站（其实就是 7 个字母依次排序后的中位数）C.

再追问：若 A 站有 2 人，B 站有 2 人，请猜测最近上车点在哪里？如何检验？

——此时站点应有 A1,A2,B1,B2,C,D,E,F ，最近上车点应该是 B 或 C。可以作图检验：

$$y = 2|x-a| + 2|x-b| + |x-c| + |x-d| + |x-e| + |x-f|$$

【推广结论 2】

若各站出发的同学有若干人人,应按照车站顺序对各站上车的同学进行排列。则上车点定在“中间同学所在站点”时，使得所有同学步行总距离最小，且结论与各站点间距离无关。

设计思路：推翻质疑中争议较大的“各站 1 人”“6 个站”等条件，求出在不同情况下的解答并讨论其共性，引导学生从不同角度看待“中间”的概念。让模型的适用范围再次推广。

（七）总结反思：

Q10:今天的数学建模学习，你有什么体会？

预设学生活动：

1.利用数学建模的思想可以从生活中发现问题，并用数学知识科学地解决问题。而熟练掌握数学建模的基本步骤能帮助我们有条理地解决问题。

2.可以进行合理假设简化复杂问题，抓住主要因素间的关系，构建基本模型。从简入繁，由浅至深。

3.可以将基本模型投入生活中检验，以此促进模型的优化，并将结论推广，从特殊到一般，寻找模型的共性，使模型更加完善、强大。

4.数学建模是用数学知识去解决生活中的问题，这也是数学最初产生的来源——生活。而又正是反复将数学投入到生活中使用，改进，才会产生那么多巧妙的数学思想，美丽的数学结论。这就是创新的力量，数学建模永远不会有“最优模型”——而生活也不会有最优，但我们可以追寻更优。

（八）作业：

1. 若 A 站有 2 人，B 站有 2 人，C，D,E 站各有 1 人，F 站有 4 人，问：最佳上车点在哪里？

2. 若要在若干个站之中选定一个停车点，每个站上车的人数各不同。在其余假设不变的前提下，请合理定义参数，并给出停车点的设定方案。

3. 结合实际生活，你认为模型还有哪些改进的空间？

六、板书设计

数学建模起始课——上车点的选定

0	O 附中
2.2	A 唐家市场
2.6	B 唐家
3.3	C 白埔路口
3.5	D 中山大学
4.7	E 鸡山
5.2	F 鸡山南

一、分析问题：

最好：所有同学总步行距离最短

二、模型准备：模型假设与数据准备

三、建立模型：y=|x-a|+|x-b|+……

四、模型求解：上车点 P∈[c,d]时，y 最小

五、解决问题：

六、模型推广：

结论推广 1：

结论推广 2：