数学建模之“冻肉解冻问题”教学设计

东莞外国语学校张志杰

一、教学内容分析

本节课设计灵感来源于新教材中《建立函数模型解决实际问题》一节。恩格斯说，数学是研究数量关系与空间形式的科学，而数学模型恰恰是数量关系和数量关系的一个近似反映。建立数学模型就是数学建模。函数模型是解释实际问题的一种工具，本节课在幂函数，指数函数，对数函数学习之后，是对这几个函数模型的分析与应用，为后续数学建模过程中科学选用函数模型提供了依据。本节课可以让同学对平时理想化确定问题的求解，回归到数学对原始实际问题的解释，让同学对生活中处处有数学，生活处处可以用数学模型解释有更深的理解，体会数学在实际问题中的应用价值。

用函数构建数学模型解决实际问题时，首先要对实际问题中的变化过程进行分析，析出其中的常量、变量及其相互关系；明确其运动变化的基本特征，从而确定它的运动变化类型。然后根据分析结果，选择适当的函数类型构建数学模型，将实际问题化归为数学问题；再通过运算、推理，求解函数模型。最后利用函数模型的解说明实际问题的变化规律，达到解决问题的目的。

此外，本节课就是本人实验的实例，强调数学与生活的联系，增强同学们的学习兴趣。

二、学情分析

1. 认知基础：学生已经学习了幂函数、指数函数、对数函数的概念和图象，积累了研究陌生函数的经验；学习了函数模型的应用，了解了不同函数模型增长速度的不同，这是本节课数学建模学习的基础。

2. 认知障碍：从实际问题中抽象出数学问题，实际问题数据的处理。

三、教学目标分析

1．知识与技能：

（1）了解数学建模的一般步骤

（2）通过实例，建立数学建模解决实际问题的思维

2．过程与方法：

（1）通过实例的学习，思考如何用数学建模对实际问题进行解释

（2）通过对数学建模过程，体会数学建模思想

（3）体会函数拟合的思想

3．情感态度，价值观：

（1）喜欢数学建模，喜欢思考如何用数学模型对生活中的实例进行解释

（2）从探索的过程中，由好奇到验证，体会到学习数学的成就感

（3）感受数学与生活的联系，感受生活处处有数学，处处可用数学解释生活

四、教学重难点：

教学重点是了解数学建模的一般步骤，对数据的分析和函数模型的选择。

难点是对数据的分析和函数模型的选择，函数模型的推广。

五、教学方法：问题驱动、引导探究

教学手段：2019 版 ppt：展示平滑切换效果，展示表格立体效果。

几何画板：辅助 ppt 进行函数模型的绘制。

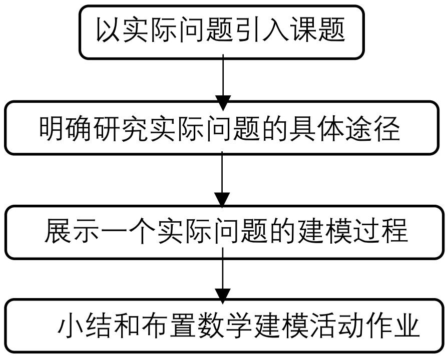
五、本节课的亮点分析

1．以实际问题为主线贯穿课堂始末，精心设问；

2．引导学生研究一个实际问题，以学生思考活动为主，教师引导为辅；

3．创新性：完全自主创新实验记录数据进行建模，最后对一类结果进行了推广，比课本的结果更加具有延伸性。

六、教学过程



（一）观察情境，提出问题

中国饮食文化博大精深。应该在炒菜之前多长时间将冰箱里的肉拿出来解冻呢？经验表明，解冻时间不是越短越好，解冻时间太短，难以对肉进行加工处理；解冻时间太长，冻肉容易腐坏。所以如何掌握解冻的时间，使得冻肉刚刚好解冻完成呢？

显然，如果能建立解冻程度随时间变化的函数模型，那么就能容易地解决这个问题。为此，需要收集一些解冻程度随时间变化的数据，再利用这些数据建立适当的函数模型。

（二）明确研究问题的方法

实例：应该在炒菜之前多长时间将冰箱里的肉拿出来解冻呢？

问题 1：如何描述完全解冻？如何对解冻过程进行测量？

先让学生思考和描述，最后提出老师的一种解决方式。

生：冻肉变得很软，解冻的温度超过冰水混合物温度等。

师：肉制品解冻是指冰晶逐步融化、肉质成分吸收水分并恢复原有结构的过程。在此，我们认定，完全解冻就是将肉从冰箱拿出，经过解冻后，冻肉和鲜肉在组织上无明显区别，切开后冻肉里面无冰冻现象的状态。用合适的力度把一把较细的小刀刺入冻肉中，由于解冻的方向是由表面到里面，所以小刀轻松插入的长度为冻肉厚度的一半时就已经完全解冻了。因此以小刀刺入冻肉的长度和冻肉厚度的一半的比值作为衡量解冻的程度。当比值为 1 时，表示冻肉完全解冻。

设计意图：主要是让学生说说如何对一个过程进行测量和分析。让学生体会如何用数学描述解冻的过程，思考如何对这个过程进行测量。

问题 2：很多因素都能导致解冻时间发生变化。请同学们说说有哪一些因素对解冻时间有显著影响？

设计意图：引导学生思考数学建模过程开始时对初始条件进行约束。

问题 3：请同学们判断以下哪几个条件对解冻时间有显著影响？

① 冻肉的品种、肥瘦
② 解冻时水的温度
③ 解冻时水的多少
④ 冻肉的形状，大小
⑤ 冻肉的初始温度
⑥ 解冻时空气流动对解冻的影响

设计意图：以上几个因素大致囊括了解冻时各个要素。让学生判断哪些要素是显著影响。并且为了让实验更加精确，要对这些因素进行初始值的设置和约束。引导学生体会主要矛盾和次要矛盾的影响。

（三）进行试验，收集数据

每个人家解冻冻肉的情况都不一样。那么我们就研究一种常见的情况下解冻的过程。那么要对解冻时间有显著影响的因素进行固定。

问题 4：不同大小，形状等因素都对解冻时间有影响。请同学们说说我们可以研究什么样的冻肉，又如何控制其它导致解冻时间变化的变量呢？

生：不如研究较为常见的块状的冻肉。规定形状约为长方体，重量适中。

设计意图：引导学生在数学建模前对无关变量进行控制，形成严谨的数学思维。

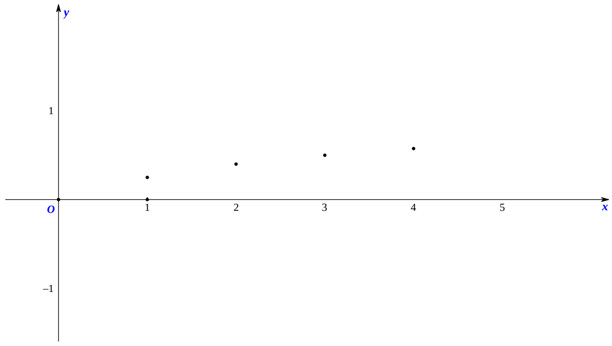
师：我们规定冻肉重量为约为 1 千克，块状，厚度约为 80mm。解冻时水温水量：直接取自来水 5 升，放在圆柱形的塑料桶中，将冻肉静置于水中并且认为肉的品种、肥瘦等其他因素对解冻的过程无显著影响。

测量过程：每隔 10 分钟，用小刀从冻肉的一面插入，测量小刀刺入冻肉的长度，记录在表格中。以下是老师为大家做的解冻猪肉实验时采集的数据。设冻肉被小刀刺入的长度从 0 mm 开始，统计经过x个 10 min 后小刀刺入的长度，计算刺入的长度占冻肉厚度一半的比值为y。

时间x/10min	0	1	2	3	4
小刀刺入的长度/mm	0	10	16	20	23
占冻肉厚度一半的比值y	0	0.250	0.400	0.500	0.575


问题 5：小刀刺入的长度与冻肉厚度一半的比值是时间的函数，但没有现成的函数模型。按照我们研究陌生函数的经验，同学们说说我们应该如何处理这些数据呢？
生：对这些数据进行描点，连线，形成图象。观察图象。
设计意图：让同学们复习处理陌生函数模型的一般思路。

师：那么，先画出散点图，利用图象直观分析这组数据的变化规律，从而帮助我们选择函数类型。
根据上表，画出散点图。



问题 6：观察散点图的分布状况，考虑到越到解冻后期，冻肉内部就越难解冻的事实，同学们说说我们可以选择什么类型的函数呢？
生 1：经过原点，$y = kx$（$k > 0$）。
生 2：不对，后面越难解冻，应该解冻速度越来越慢。我觉得是$y = k\sqrt{x}$。
生 3：那和$y = lnx$有关也可以呀。
生 4：既然这样，我把$y = a^x(0 < a < 1)$的图象垂直翻转过来也很像！
设计意图：引导同学们思考从实际问题到具体函数模型可以有不同的选择，在这里，这个函数模型的图象经过原点，函数是上凸函数较为合理。并且引导同学们通过图象的变换得到上凸函数模型。

师：根据同学们的想法，我们总结出以下几种模型（引导函数上凸且过原点得到较为精确的拟合函数）。

1，$y = kx(k > 0)$

2，$y = k\sqrt{x}$

3，$y = ka^x + 1\big(k < 0,\ 0 < a < 1\big)$

4，$y = k\,ln(x + 1)(k > 0)$

（四）选择函数模型

师：（在获得以上模型的同时评述每一个函数模型）同学们说的都有道理。不妨取函数$y = k\,ln(x + 1)(k > 0)$来近似刻画解冻程度随时间变化的规律。

问题 7：为了求得解冻程度增长比例k，能否直接用一组数据如$x=1$，$y=0.25$时，求出$k=\frac{y}{\ln(x+1)}=\frac{0.25}{\ln(1+1)}=0.36$？这与用比值的平均值建立函数模型有什么差异？

设计意图：引导学生思考如何尽量排除一组数据引起的误差。建立严谨的思维方式。

可对于每一个$x(x\neq0)$所对应的y的值，计算每个y的值与$\ln(x+1)$的比值，列出表格

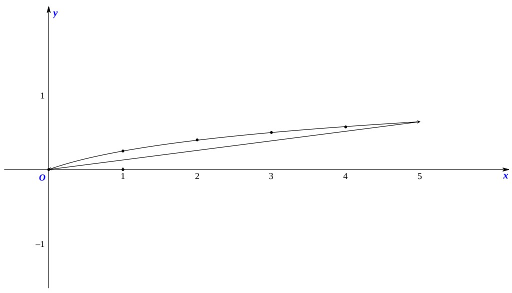
x	0	1	2	3	4
y	0	0.25	0.4	0.5	0.575
$\ln(x+1)$	0	ln2	ln3	ln4	ln5
比值$k=\frac{y}{\ln(x+1)}$		0.360	0.364	0.360	0.357

取k的平均值约为 0.360，我们把这个平均值作为解冻程度增长比例k，就得到一个函数模型

$$y=0.36\,ln(x+1)(x\geq0)。$$

（五）检验模型

师：将已知数据代入模型，获得函数的图象，可以惊喜地发现，这个函数模型与实际数据非常吻合！这说明它能很好地反映冻肉解冻程度随时间的变化规律。



设计意图：模型并不能准确地反映实际问题，必须做出检验，吻合度较高才能认为是合适的。若是不合适，还需要换一个数学模型进行拟合。

（六）求解问题

问题 8：请同学们根据此模型，列出完全解冻时所需时间的表达式。
设计意图：通过简单模型的求解，让学生体会成功的喜悦。

师：将$y=1$代入$y=0.36\,ln(x+1)$，解得$x=e^{\frac{1}{0.36}}-1\approx15.08$。至此，我们得出结论：对于重量约为 1kg，厚度约为 80mm 的猪肉，解冻时间约为 150.8 分钟。

推广：

问题 9：这是在厚度约为 80mm 的猪肉的解冻问题下的一个解释，那么对于厚度为$p\ mm$的冻肉，能不能对上述结果进行推广，在不同的厚度下，得到完全解冻时间的表达式呢？

设计意图：让学生思考对于不同厚度的冻肉，能否在此模型的基础上进行推广。同时说明数学建模的适用性可以很广。

为了能用上上述数据，假设冻肉厚度为$p\ mm(p > 50)$）,那么

x	0	1	2	3	4
y	0	$\frac{10}{\frac{1}{2}p}$	$\frac{16}{\frac{1}{2}p}$	$\frac{20}{\frac{1}{2}p}$	$\frac{23}{\frac{1}{2}p}$
$\ln(x+1)$	0	ln2	ln3	ln4	ln5
比值$k = \frac{y}{\ln(x+1)}$		$\frac{10}{\frac{1}{2}p\ln 2}$	$\frac{16}{\frac{1}{2}p\ln 3}$	$\frac{20}{\frac{1}{2}p\ln 4}$	$\frac{23}{\frac{1}{2}p\ln 5}$

$$k \approx \frac{\frac{10}{\frac{1}{2}p\ln 2}+\frac{16}{\frac{1}{2}p\ln 3}+\frac{20}{\frac{1}{2}p\ln 4}+\frac{23}{\frac{1}{2}p\ln 5}}{4} = \frac{\frac{80}{p}\times(\frac{10}{40\ln 2}+\frac{16}{40\ln 3}+\frac{20}{40\ln 4}+\frac{23}{40\ln 5})}{4} \approx \frac{80}{p}\times 0.36$$

所以可以得到的函数模型为：$y = \frac{80}{p}\times 0.36\,ln(x+1)$

这也解释了，厚度比 80mm 还要薄的，y 能更快达到 1，即能更快完全解冻，这显然和现实是相吻合的。

（七）课堂小结与作业布置

上述过程可以概括为，观察实际情境，发现和提出问题，明确研究问题的方法，收集数据，选择函数模型，求解函数模型，检验模型，实际问题的解.

研究性作业：

1.**总结与反思：**根据本节课的研究方法，请再同学们探究一下以$y = ka^x + 1$

$(k < 0,\ 0 < a < 1)$为模型时，这个数学模型能很好地解释测出数据吗？该冻肉完全解冻的时间约为多少呢？

2.请同学们用函数模型对身边的一个实际问题进行分析，写一篇数学建模报告。

【参考文献】

[1]教育部。普通高中数学课程标准（2017 年版）[S].北京:人民教育出版社，2018:2
[2]高中数学核心内容教学设计案例集（上册）[S].北京:人民教育出版社，2016:12
[3]普通高中教科书数学必修第一册 [S].北京:人民教育出版社