

# 汽车泊车路径规划

人大附中深圳学校 林健 张晓华

## 一、教学目标分析

- 1、了解汽车的转向原理，能用数学的眼光认识“泊车路径规划”问题，对它进行抽象化、符号化、数量化处理，建立数学模型；能利用数学知识和计算机软件求解数学模型；有意识地对建立的数学模型进行检验和完善；
- 2、经历数学建模的完整过程和研究方法，积累数学建模活动的经验，能借鉴这些经验解决类似问题；
- 3、在数学建模的过程中提升学生的查阅资料能力、抽象概括能力、数学运算能力，培养学生的数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数据运算等核心素养；
- 4、研究课题源于生活，而又高于生活，激发学生的数学学习兴趣，增强学生对数学应用价值的认识，提升学生发现问题、分析问题、解决问题的能力。在自主探索和小组合作中，增强数学应用意识、创新意识和合作精神。

## 二、教学内容分析

**“创设情境”**：学生对汽车泊车具有一定的生活体验，对自动泊车、自动驾驶技术有所耳闻。教师亲自拍摄“泊车困难”的生活小视频，使学生倍感亲切，激发他们的兴趣，又利用科普小视频介绍自动泊车技术，引导学生关注汽车泊车路径规划问题，进入本节课主题。

**“背景知识”**：实际问题往往比较综合、复杂，因此需要引导学生查阅资料，了解相关的背景知识，为后面的建立模型、求解模型做铺垫，这也是研究工作必不可少的一步。

**“建立模型”**：在了解背景知识的前提下，引导学生思考什么是主要问题，什么是次要问题，从而简化模型。

**“求解模型”**：运用数学知识求解所建模型，从而解决实际问题，充分体现了数学的应用价值，培养学生的数学应用能力和探究能力。

**“检验模型”**：实际问题是复杂的，我们在建立模型时作了一定程度的简化，因此需要引导学生考虑所建模型与实际情况的差别，对模型进行检验和完善，这也体现了严谨的科学精神；

**“总结思考”**：经历以上教学内容后，学生对数学建模一定会有新的体会，因此很有必要总结数学建模的本质和完整数学建模的过程。同时对课堂内容进行拓展延伸，引导学生课后做进一步的探索。

**教学重点**：通过具体情境，让学生经历完整的数学建模过程，体会研究方法。

**教学难点**：了解背景知识，厘清汽车泊车路径规划问题的本质，对模型进行假设和简化。

## 三、学情分析

- 1、学生对汽车泊车具有一定的生活体验，从生活经验中知道转动方向盘，汽车作近似圆周运动；
- 2、学生在课堂上已经学习了三角函数、向量、平面几何、解析几何、不等式等相关知识，因此数学知识储备是足够的；
- 3、汽车泊车的路径规划需要几何作图，图形较为复杂，可以引导学生利用几何画板等软件作图，帮助分析。如果学生没有几何画板的基础，可以用尺规作图；

- 4、寻找可能存在的碰撞点需要较强的直观想象能力，部分学生可能会比较吃力；
- 5、本问题涉及的量较多，学生易混；将真实数据代入碰撞分析得到的不等式，相较于平时习题中比较简单的数字，计算量较大，对学生计算能力提出挑战。可以借助计算器，也可以利用计算机软件求解；
- 6、待确定的未知数较多，学生可能会不知如何分析，需要教师引导。

## 四、教学方法与教学手段

### 教学方法：

- 1、讲授法：背景知识涉及汽车参数、Ackermann 转向几何原理，需要教师补充；
- 2、提问法：通过精心设计的问题启发引导学生；
- 3、探究法：在一定的启发下，学生自主探究，获得解决问题的成就感；
- 4、讨论法：小组内讨论、全体同学间讨论，碰撞思想，不断完善；

### 教学手段：

- 1、合理使用多媒体：精心拍摄和选择视频，使教学内容直观、形象、生动，激发学生的兴趣；
- 2、使用计算机辅助软件：利用几何画板作图，帮助学生厘清汽车泊车过程中的几何关系；利用 Excel 或者 Matlab 帮助解决计算问题；
- 3、使用网络资源：引导学生上网查阅资料，获得数据。

## 五、教学过程设计

### 1、整体设计思路

创设情境：通过泊车难、自动泊车技术等情境引入主题：汽车泊车路径规划问题；

背景知识：带领学生了解相关的背景知识，为数学建模做准备；

建立模型：根据背景知识和研究的主要问题，对实际情境进行简化，建立汽车泊车的数学模型；

求解模型：根据建立的数学模型，运用数学知识规划泊车路径；

检验模型：考虑实际情况和所建模型间的区别，反思可能存在的问题；

总结思考：从该课题的研究经历总结数学建模的思想和方法，对该课题的研究成果作进一步的延伸拓展。

### 2、创设情境

**情境 1** 教师介绍自己的学车、开车经历，播放亲自出镜的视频：教师在停车场来回倒车很多次，依然无法泊入车位，十分苦恼。

**设计说明：**视频轻松、幽默，导入自然，激发学生的兴趣；

**情境 2** 展示美国密歇根大学在 2006 年发表的一篇论文，通过对交通事故数据库和保险公司的事故统计资料进行调查分析，结果表明泊车导致的事故已经占到各类交通事故总数的 44%，其中有 65.3%的泊车碰撞是在倒车的过程中造成的。

Number of crashes by vehicle operation

Vehicle motion	Number	%
Traveling straight ahead	1639	46.0
Entering a parking space	1211	34.0
Leaving a parking space	355	10.0
Turning (driveway or intersection)	352	10.0
<i>Total</i>	<i>3557</i>	<i>100.0</i>

Number of crashes by parking operation

Parking maneuver	Number	%
Backing into curb	414	26.4
Pulling to curb-forward	609	38.9
Pulling from curb-forward	378	24.1
Stopped-not at curb	83	5.3
Unknown	82	5.3
<i>Total</i>	<i>1566</i>	<i>100.0</i>

表 1

**设计说明：**引入权威数字，再次展示泊车难的严重性。

**情境 3** 播放自动泊车视频，并讨论：视频中的自动泊车如何实现的？然后小组展示。

**设计说明：**展示最新科技，吸引学生的兴趣；鼓励学生大胆猜想，培养想象力。

**情境 4** 在学生讨论的基础上，播放介绍自动泊车技术的视频。

**设计说明：**科普最新科技，拓宽学生视野，同时引入本课研究的问题：自动泊车技术中探测器可以探测汽车的初始位置、停车位大小、障碍物位置，那它是如何设计汽车泊车路径的呢？

### 3、背景知识

#### (1) 认识汽车

展示小汽车照片，介绍小汽车参数，带领学生认识小汽车；



图 1

**问题 1：**根据大家的生活经验，司机转动方向盘，小汽车的哪个车轮发生转动？

小汽车的方向盘是带动前轮转动，所以前轮是转向轮，后轮和车身一直保持平行。

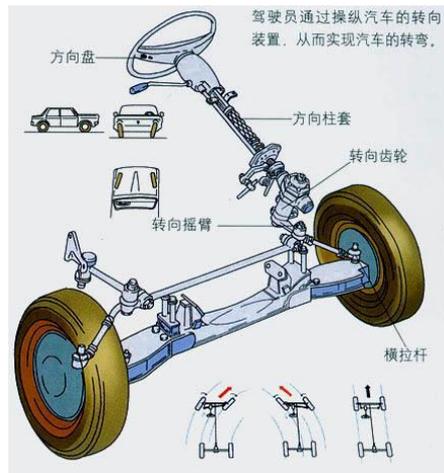


图 2

### (2) 介绍 Ackermann 转向几何原理

为避免在汽车转向时产生路面对汽车行驶的附加阻力和轮胎过快磨损, 要求转向系统能保证在汽车转向时使所有车轮均作纯滚动。德国的工程师提出著名的 Ackermann 转向几何原理: 只有四个车轮路径的圆心交会于后轴的延长线上的瞬时转向中心, 汽车所有车轮方能作纯滚动。也就是说: 汽车车身上的任意一点的运动轨迹都是指向同一个圆心的圆, 该圆心在汽车后轴的延长线上。

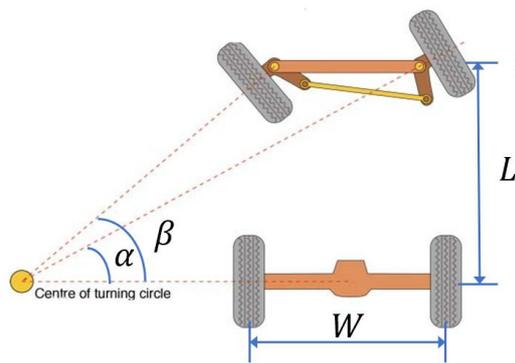


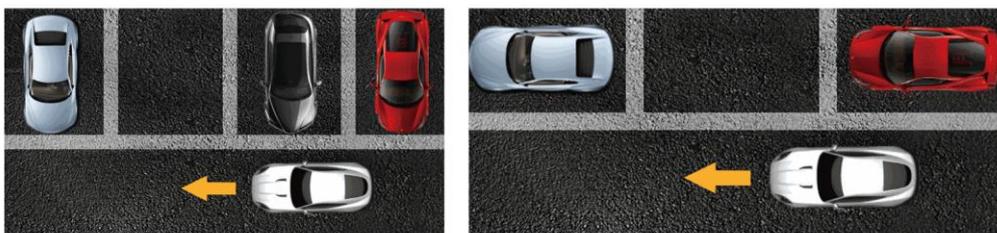
图 3

**问题 2:** 汽车两个转向轮的转向角相同吗? 它们之间有什么关系呢?

利用三角函数和几何知识, 可得:  $\frac{1}{\tan\alpha} - \frac{1}{\tan\beta} = \frac{W}{L}$ , 外侧转向轮的转角小于内测转向轮的转角。

### (3) 介绍车位

最常见的车位包括垂直车位和停车位。



垂直车位

平行车位

图 4

**问题 3:** 如果你是司机, 你会如何操作实现倒车入库呢?

#### (4) 教师总结

转动方向盘, 汽车车上的所有点均作圆周运动, 圆心为前轮垂线和后轴延长线的交点。方向盘转动的角度不同, 圆周运动的半径会随之改变。以上大家描述的倒车方法都是定性的, 而自动泊车是需要提供一条准确的路径, 所以接下来我们建立数学模型, 定量地研究泊车路径的规划问题。

**设计说明:** 了解相关的背景知识是解决问题的前提。问题 3 至关重要, 培养学生的直观想象能力, 同时为后面建立数学模型、求解模型做好铺垫。

#### 4、建立模型

实际问题非常复杂, 我们在建立数学模型时应明确主要问题, 抓住主要矛盾, 对一些次要矛盾暂时做简化处理, 即作出一些比较合理的假设, 使问题得以简化。

**(1) 问题 1:** 从数学角度看, 泊车路径规划问题的实质是什么? 我们可以如何简化模型? 请大家先独立思考, 尝试建立你的数学模型, 然后小组内分享交流。

#### (2) 教师展示简化模型

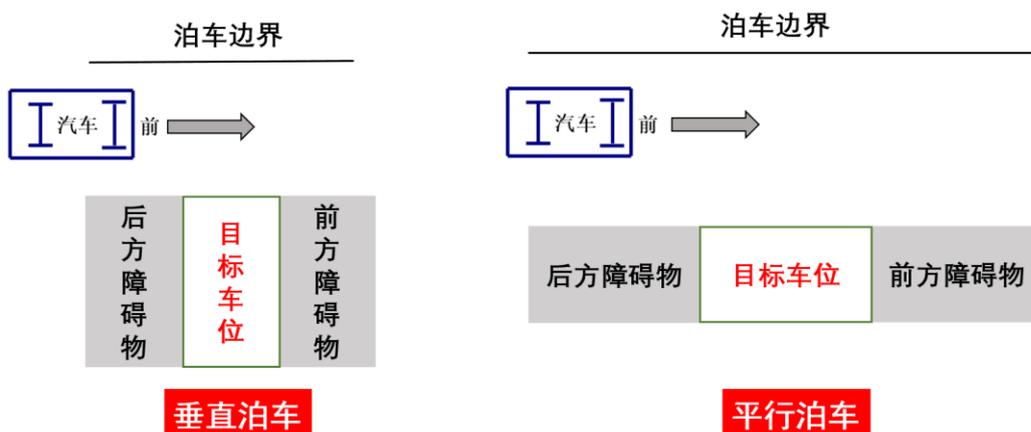


图 5

小汽车简化为长方形, 四个轮胎简化为相等的线段。假设初始位置汽车车身与车位边沿保持平行, 前后方车位都停满车, 通车道的另一边规定泊车边界。

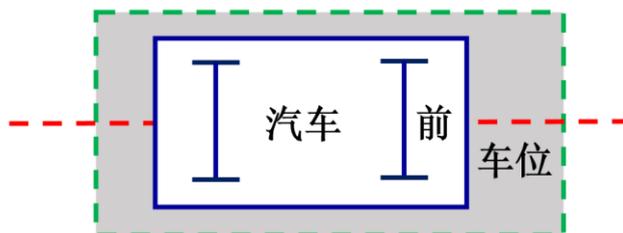


图 6

#### 泊车要求:

- 1、车辆在泊车过程中不能与泊车边界以及前后车位边界发生碰撞;
- 2、泊车完成时, 车辆与车位左右侧边界平行, 且距离相等。

汽车在满足上述泊车要求的情况下停入车位后可以通过前进或者后退调节汽车尾部与车位底部的距离, 这是非常容易实现的, 所以我们可以不考虑这个过程。

**设计说明:** 简化模型的关键是抓住主要问题, 简化次要矛盾, 引导学生建立合理的数学模型, 这是求解模型的基础。

## 5、求解模型

(1) 任务 1: 上网搜集或实地测量汽车及车位的相关参数, 填在表格中。

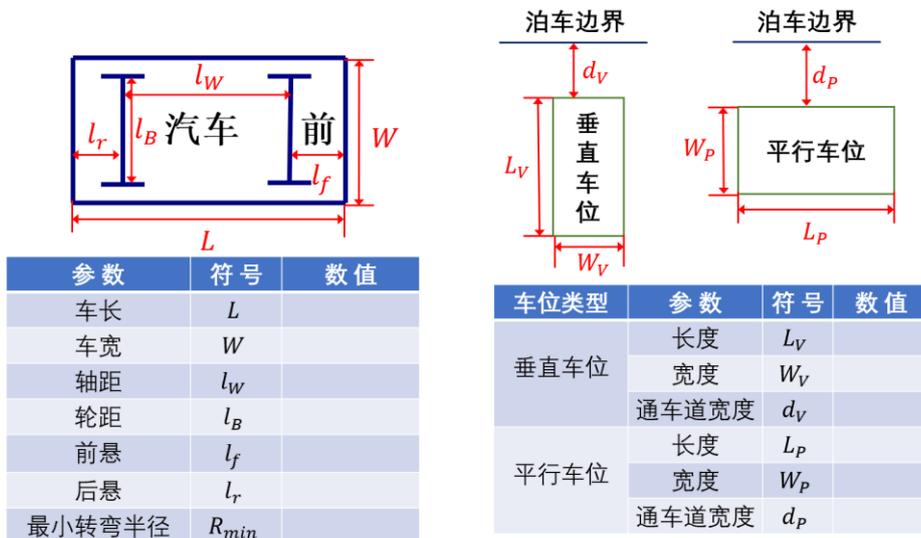


表 2

### (2) 垂直泊车方案

采用单圆弧垂直泊车方案。

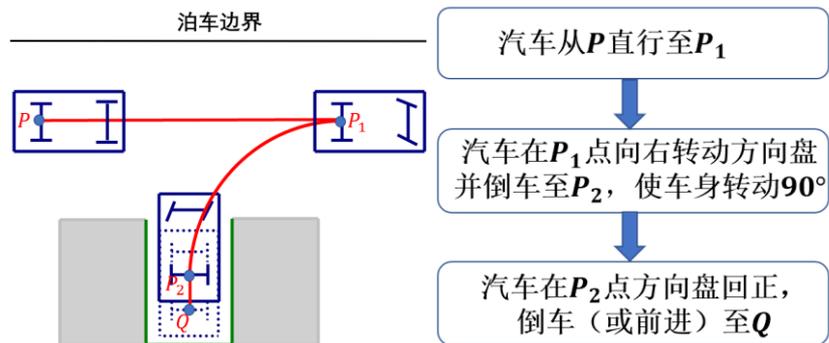


图 7

任务 2: 请根据汽车及车位数据和汽车初始位置, 确定 $P_1$ 、 $P_2$ 的位置及圆弧半径。

### (3) 平行泊车方案

采用两段圆弧的平行泊车方案。

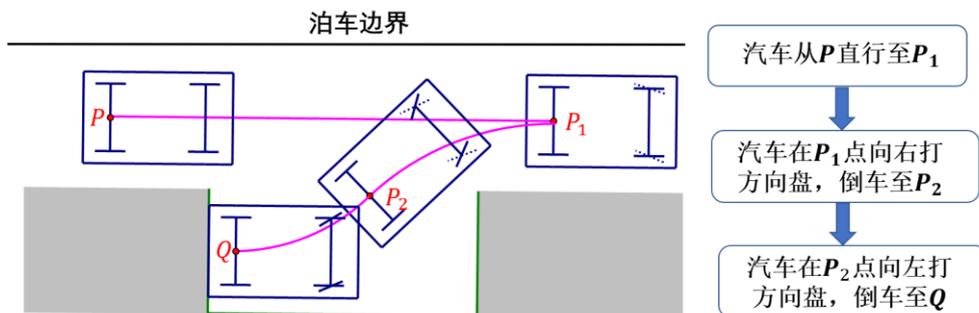


图 8

**任务 3:** 请根据汽车及车位数据和汽车初始位置, 确定 $P_1$ 、 $P_2$ 的位置及两段圆弧半径.

**设计说明:** 学生先前提出了多种泊车方法, 为了便于求解, 我们取两种简单的泊车方案: 垂直泊车采用单圆弧法, 平行泊车采用两段圆弧法. 在平行泊车中, 为了腾出更多的空间用于倒车入库, 汽车泊车的最终位置为车尾到达车位底部. 此处可以提示学生: 作图非常关键, 大家可以利用几何画板软件或者尺规作图帮助自己更好地找到几何关系.

#### (4) 学生分享

请部分学生上台分享思路, 所有同学参与讨论.

**设计说明:** 学生独立完成全部模型求解的难度较大, 让部分学生上台分享, 激发灵感, 同学们通过相互讨论, 不断完善. 教师可以根据学生的情况适当引导.

#### (5) 教师引导: 垂直泊车

①可以建立直角坐标系, 将复杂的几何关系转化为代数运算.

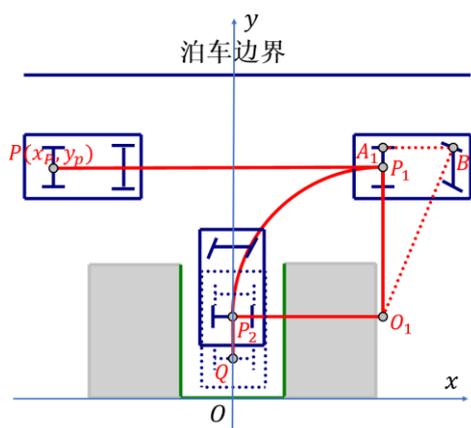


图 9

设初始位置 $P(x_p, y_p)$ , 则 $P_1(R_1, y_p)$ ,  $P_2(0, y_p - R_1)$

②**问题 1:** 小汽车有一个重要的参数是“最小转弯半径”, 指的是什么呢?

“最小转弯半径”指的是汽车方向盘转到极限位置时, 外侧转向轮的中心在地面滚过的轨迹圆半径, 也就是图中的 $O_1B_1$ .  $O_1B_1$ 的最小值为 $R_{min}$ , 则可利用几何关系求出后轴中心转弯半径 $R_1$ 的最小值为 $r_{min}$ .

$$\text{在 Rt}\triangle A_1B_1O_1 \text{ 中, } |O_1A_1| = \sqrt{O_1B_1^2 - L_W^2}$$

$$\text{则 } R_1 = |O_1P_1| = \sqrt{O_1B_1^2 - L_W^2} - l_B/2$$

$$\text{因为 } |O_1B_1| = R_{min}, \text{ 所以 } R_1 \geq r_{min} = \sqrt{R_{min}^2 - L_W^2} - l_B/2$$

③**问题 2:** 在泊车过程中汽车哪些位置存在碰撞风险?

**可能碰撞点 1:** 汽车尾部可能与车位底部相碰;

**可能碰撞点 2:** 汽车右侧边缘 $D_1(D_2)$ 可能与前方车位的左顶点 $M$ 相碰;

**可能碰撞点 3:** 汽车左前顶点 $C_1(C_2)$ 可能与泊车边界相碰.

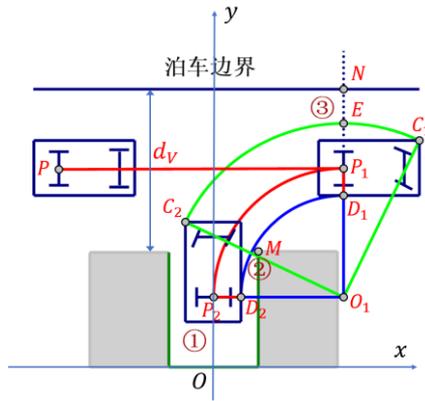


图 10

④问题 3: 三个可能的碰撞点都不能发生碰撞, 这就是约束条件, 能否将它们转化为数学关系呢?

约束条件可以转化为线段的大小关系。

可能碰撞点 1:  $|OP_2| > l_r$ , 即  $y_p > R_1 + l_r$ ;

可能碰撞点 2:  $|O_1M| < |O_1D_1|$ , 即  $(R_1 - \frac{W_V}{2})^2 + (y_p - R_1 - L_V)^2 < (R_1 - \frac{W}{2})^2$ ;

可能碰撞点 3:  $|O_1E| < |O_1N|$ , 即  $(l_W + l_f)^2 + (R_1 + \frac{W}{2})^2 < (y_p - R_1 - L_V - d_V)^2$ 。

另外:  $R_1 \geq r_{min}$

⑤问题 4: 因为  $R_1$  取最小值时操作最简单, 只需向右打死方向盘即可, 取  $R_1 = r_{min}$ , 此时能否成功泊车?

参数	符号	数值
车长	$L$	4360mm
车宽	$W$	1785mm
轴距	$l_W$	2535mm
轮距	$l_B$	1535mm
前悬	$l_f$	840mm
后悬	$l_r$	985mm
最小转弯半径	$R_{min}$	5.5m

车位类型	参数	符号	数值
垂直车位	长度	$L_V$	5.3m
	宽度	$W_V$	2.4m
	通车道宽度	$d_V$	5.5m
平行车位	长度	$L_P$	6.25m
	宽度	$W_P$	2.3m
	通车道宽度	$d_P$	3.8m

表 3

代入搜集的汽车和车位数据, 综合三个可能碰撞点得:  $8.040 < y_p < 8.876$ , 即汽车右侧离车位顶部距离介于(1.848m, 2.684m)之间时可以泊车成功。

⑥问题 5: 如果汽车右侧离车位顶部距离小于 1.848 米或者大于 2.684 米, 该如何实现倒车入库呢?

$$\left\{ \begin{array}{l} y_p > R_1 + l_r \quad \textcircled{1} \\ (R_1 - \frac{W_V}{2})^2 + (y_p - R_1 - L_V)^2 < (R_1 - \frac{W}{2})^2 \quad \textcircled{2} \\ (l_W + l_f)^2 + (R_1 + \frac{W}{2})^2 < (y_p - R_1 - L_V - d_V)^2 \quad \textcircled{3} \\ R_1 \geq r_{min} \quad \textcircled{4} \end{array} \right.$$

若关于  $R_1$  的不等式组有解, 则可通过改变转弯半径  $R_1$  实现倒车入库; 否则无法成功泊车。

(6) 教师引导: 平行泊车

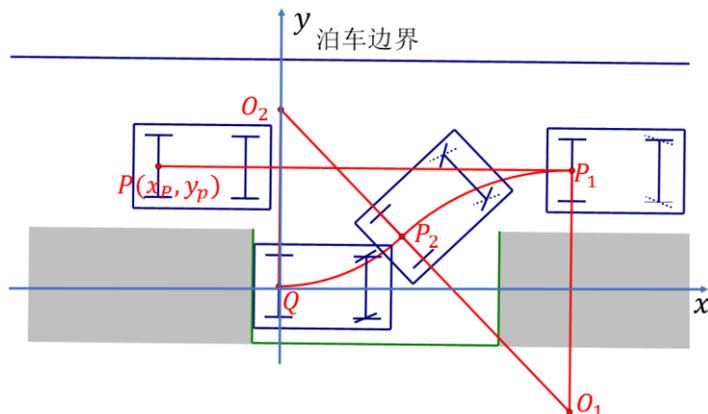


图 11

①问题 6: 两段圆弧是什么位置关系?

根据 Ackermann 转向几何原理, 汽车圆周运动的圆心 $O_1$ 和 $O_2$ 应该都落在后轴延长线上, 所以 $O_1$ 、 $O_2$ 、 $P_2$ 三点共线, 因此两段圆弧相切。

由 $|O_1O_2| = R_1 + R_2$ 得:  $x_{P_1} = \sqrt{2y_P(R_1 + R_2)}$ , 即 $P_1(\sqrt{2y_P(R_1 + R_2)}, y_P)$

由 $\overrightarrow{O_2P_2} = \frac{R_2}{R_1} \overrightarrow{P_2O_1}$ 得:  $P_2(\frac{R_2}{R_1+R_2} \sqrt{2y_P(R_1 + R_2)}, \frac{R_2}{R_1+R_2} y_P)$

②问题 7: 和垂直车位类似, 平行泊车中, 汽车哪些位置存在碰撞风险? 写出对应的数学关系。

可能碰撞点 1: 汽车右侧边缘 $A_1(A_2)$ 可能与前方车位的左顶点 $M$ 相碰;

$$|O_1M| < |O_1A_1|, \text{ 即 } (\sqrt{2y_P(R_1 + R_2)} - L_P + l_r)^2 + (\frac{W_P}{2} - y_P + R_1)^2 < (R_1 - \frac{W}{2})^2$$

可能碰撞点 2: 第二段圆弧中, 汽车右前顶点 $B_2(B)$ 可能与前方车位的左顶点 $M$ 相碰;

$$|O_2M| > |O_2B|, \text{ 即 } (L_P - l_r)^2 + (R_2 - \frac{W_P}{2})^2 > (L - l_r)^2 + (R_2 + \frac{W}{2})^2$$

可能碰撞点 3: 第一段圆弧中, 汽车左前顶点 $C_1(C_2)$ 可能与泊车边界相碰。

$$|O_1N| > |O_1E|, \text{ 即 } (d_P + \frac{W_P}{2} - y_P + R_1)^2 > (L - l_r)^2 + (R_1 + \frac{W}{2})^2$$

③问题 8:  $R_2$ 越小, 碰撞点 1 和 2 发生碰撞的可能性越大还是越小?

利用代数知识, 我们很容易发现 $R_2$ 越小, 碰撞点 1 和 2 越不容易发生碰撞。所以我们可以取 $R_2 = r_{min}$ , 此时约束条件变为:

$$(L_P - l_r)^2 + (r_{min} - \frac{W_P}{2})^2 > (L - l_r)^2 + r_{min} + \frac{W}{2})^2 \quad \text{①}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sqrt{2y_P(R_1 + r_{min})} - L_P + l_r)^2 + (\frac{W_P}{2} - y_P + R_1)^2 < (R_1 - \frac{W}{2})^2 \quad \text{②} \\ (d_P + \frac{W_P}{2} - y_P + R_1)^2 > (L - l_r)^2 + (R_1 + \frac{W}{2})^2 \quad \text{③} \\ R_1 \geq r_{min} \quad \text{④} \end{array} \right.$$

不等式①成立, 且关于 $R_1$ 的不等式②③④有解, 则可实现基于两段圆弧的平行泊车。

比如, 取 $y_P = 3$ , 即汽车右侧离车位顶部距离为 0.9575 米时, 代入表 3 数据, 解不等

式②③④得： $4.113 \leq R_1 < 11.394$ ，可成功实现泊车。

**设计意图：**采用问题引导式的教学方法，引导学生抽丝剥茧，层层递进，不断探索，感受数学知识的巨大应用价值。

## 6、检验模型

我们成功地建立了数学模型，并且通过求解模型解决了汽车泊车路径规划问题。但实际情况是复杂的，我们建立的模型是否有存在问题的地方呢？这就需要我们带着批判思维检验模型。

### (1) 小组交流

小组成员之间根据他人提供的小汽车参数、车位数据及小汽车初始位置设计汽车泊车路径。

### (2) 小组讨论

在实际自动泊车的路径规划中运用上述数学模型可能存在哪些问题？

教师点评学生的观点，并总结可能存在的问题：

①该数学模型中规定泊车过程中汽车不能触碰前后车位边界，要求过于苛刻。实际泊车中可能存在一侧未停车和两侧未停车的情况，应以不与实际障碍物碰撞作为泊车条件；

②该数学模型的前提是汽车转向时不发生侧滑，但在实际泊车中较难实现，导致汽车无法按规划的路径行驶；

③实际应用中，距离探测存在误差，造成规划的路径出现偏差；同时，实际调整方向盘的位置偏离规划的位置，导致最终无法成功泊车；

④泊车方案较为简单，遇到小汽车尺寸较大或车位尺寸较小时，无法设计泊车路径；

……

**设计意图：**模型的建立和求解都是在实际情境简化后进行的，所以一定要对所建模型进行检验，这是科学的严谨精神。

## 7、总结思考

### (1) 课堂总结

**问题 1：**通过该课题的研究，你对数学建模有了怎样的认识？请谈谈你的体会。

数学建模就是根据实际问题建立数学模型，对数学模型进行求解，然后根据结果去解决实际问题。

**问题 2：**根据你的体验，请总结完整的数学建模过程。



图 12

**设计意图：**总结过程与方法，积累经验。

### (2) 课后思考

**课后思考 1：**对于较大尺寸的小汽车或者较小尺寸的车位，如何规划泊车路径呢？请继续优化泊车方案；

**课后思考 2：**除垂直车位和平行车位外，还存在斜车位。查找资料或实地观察，了解斜

车位的相关信息，设计针对斜车位的泊车路径。

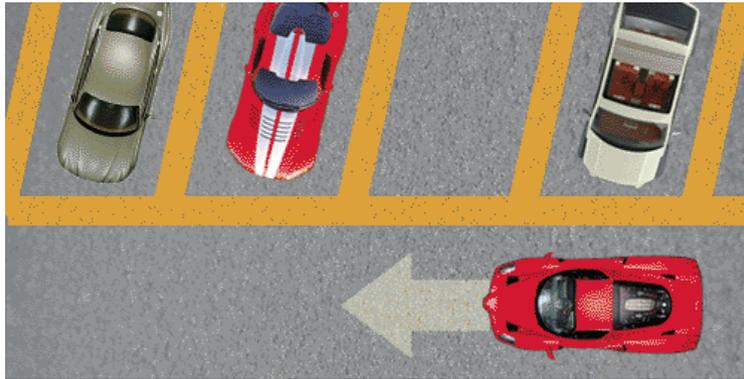


图 13

## 六、教学设计来源及原创性说明

该教学设计灵感来源于笔者的真实生活体验：开车容易泊车难，加上一些汽车厂家对自动泊车技术的宣传，吸引了笔者的兴趣。笔者的教育背景为物理学博士，对于自动泊车中的探测技术比较熟悉，反而对泊车路径规划不甚了解。根据生活经验和查阅文献发现，汽车泊车路径规划非常适合作为高中生的数学建模课题，涉及的数学知识包括三角函数、平面几何、解析几何、不等式等都是《普通高中数学课程标准（2017年版）》中界定的课程内容。笔者在参考部分文献的基础上，首先自己完成了对汽车泊车路径规划的研究，然后在自己研究的基础上针对高中生的知识水平和能力水平设计了本数学建模课程，该教学设计完全原创。

### 参考文献：

- 【1】Paul Green. Parking Crashes and Parking Assistance System Design: Evidence from Crash Database, the Literature and Insurance Agent Interviews, SAE World Congress, 2006, 1: 1685~1700
- 【2】张持, 张永林. 基于两段圆弧的倒推式平行泊车路径规划方法, 计算机与数字工程, 2019, 47 (12): 3035-3040
- 【3】张弛. 基于连续曲率的平行泊车路径规划研究. 合肥工业大学硕士学位论文, 2015
- 【4】张星. 基于超声波检测技术的自动泊车控制系统研究. 湖北工业大学硕士学位论文, 2015.
- 【5】魏振亚. 基于超声波车位探测系统的自动泊车方法研究, 合肥工业大学硕士学位论文, 2013