

《养老金问题的数学模型探究》教学设计

一、内容分析

养老金问题的数学模型是以等比数列知识为基础，源自人教版普通高中课程标准实验教科书必修五第二章。在章末的“探究与发现”中，教材以“购房中的数学”体现了等比数列在现实生活中的应用。而事实上“养老金问题”和“购房贷款问题”是同一个数学模型，选择“养老金问题”为研究主题，一方面让学生体验数学建模的全过程，另一方面希望通过数学模型的分析，让学生们对社会问题和矛盾有更深刻的理解和思考。

二、学情分析

1. 授课对象：重点中学高一学生
2. 认知基础：已掌握数列的概念，等差，等比的定义、通项公式、求和公式的相关知识；并初步了解数学建模的基本步骤，具有从特殊到一般的基本数学思想。
3. 认知障碍：
 - (1) 对养老金问题的实际背景缺乏认知；
 - (2) 处理较复杂的实际问题，缺乏对信息筛选，整理，提取有效条件的经验；
 - (3) 对由递推关系求通项公式的方法未熟练掌握；
 - (4) 数字和符号的运算能力较弱。

三、教学目标

通过养老金问题情境的创设，运用学生主体，问题引领，任务驱动等教学方式，让学生经历数学建模的全过程；发现每年保有额间的递推关系，并掌握由递推关系求通项公式的迭代法和待定系数法，巩固从特殊到一般的数学思想；尝试使用 Excel 完成表格和绘制散点图的技能，积累获取信息，筛选数据的经验；从而综合提升数学建模，数学抽象、逻辑推理，数据分析及数学运算多项核心素养。

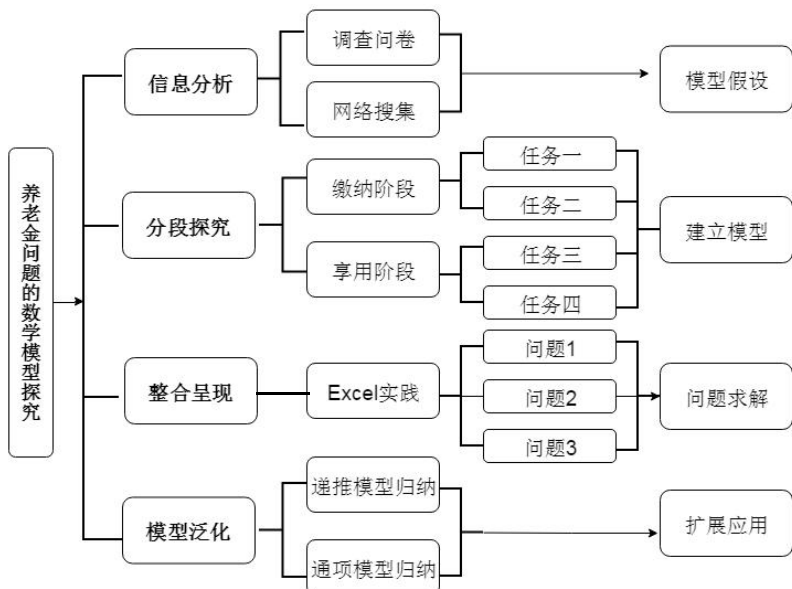
四、教学重难点和关键

1. 教学重点：养老金问题数学模型的建立
2. 教学难点：
 - (1) $a_n = \rho a_{n-1} + b (n \geq 2)$ 递推模型的发现；
 - (2) 由递推模型求通项模型 $a_n = \alpha \cdot \rho^n + \beta$
3. 教学关键点：(1) 从特殊到一般的规律观察；(2) 迭代意识；(3) 待定系数方法

五、教学方法和手段

1. 教学方法：以学生为主体，通过问题引领，任务驱动，分组操作，小组展示等方法，让学生全方位体验数学建模的每个环节。
2. 教学手段：视频展示，调查问卷，网络搜索，表格填写，散点图绘制，Excel 表格操作等多种手段相结合。

六、教学流程设计



七、教学过程

教学环节	教学内容与过程	设计意图																																
创设情境 提出问题 (2分钟)	观看视频《养老中国》，了解养老保险政策以及养老金缴纳与享用的基本过程，并提出问题：如果按我国人均寿命76岁计算，我们缴纳的养老金及其产生的利润能否全部享用？	视频引入，创设养老主题情境，提出需要研究的问题。																																
信息分析 模型假设 (3分钟)	<p>1. 通过以近五年内退休职工为对象进行问卷调查，获得如下信息：</p> <ul style="list-style-type: none"> ● 养老金的缴纳和享用是按月计算； ● 调查对象每月缴纳金额（包括个人缴纳和单位缴纳）平均为1920元； ● 调查对象退休之后每月得到养老金平均为6350元。 ● 70%被调查对象缴纳养老金超过30年； <p>于是将模型假设为：</p> <ul style="list-style-type: none"> ● 养老金的缴纳和享用按年计算； ● 假定缴纳养老金年限为30年，每年缴纳金额（包括个人缴纳和单位缴纳）固定为2.5万； ● 关于享用，假定一个人退休之后每年得到养老金为8万元。 <p>2. 通过网络搜集各银行的各种储蓄方式利率，以5年定期利率为参考，于是将模型假设为：</p> <ul style="list-style-type: none"> ● 缴纳的养老金以储蓄的复利形式在银行增值；假定年利率为3.5%。 <p>综合可得，模型假设为：</p> <p>缴纳阶段</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ 年限：参加工作至退休，按30年计算 ▪ 缴纳方式：每年固定缴纳2.5万元 ▪ 增值方式：积累的基金以银行储蓄的复利形式，年利率为3.5% <p>享用阶段</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ 年限：退休至寿终 ▪ 享用方式：每年固定领取8万元 ▪ 增值方式：剩余的基金以银行储蓄的复利形式，年利率为3.5% 	通过调查问卷和网络搜索，获得有效信息，并作出合理假设，使得问题的条件和目标更为清晰。																																
分段探究 建立模型 (9分钟)	<p>1. 缴纳阶段</p> <p>如果用a_n表示缴纳养老金后的第n年积存的总金额，如何计算a_n呢？</p> <p>任务一：推导a_n与a_{n-1}的递推关系</p> <p>【学生活动】请填写下表，并尝试找到a_n与a_{n-1}的递推关系</p> <table border="1" data-bbox="541 1738 987 2018"> <thead> <tr> <th></th> <th>缴纳</th> <th>利润</th> <th>积存</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>第1年</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>第2年</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>第3年</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>第4年</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>.....</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>第n年</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>.....</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>【学生展示】</p>		缴纳	利润	积存	第1年				第2年				第3年				第4年							第 n 年							
	缴纳	利润	积存																															
第1年																																		
第2年																																		
第3年																																		
第4年																																		
.....																																		
第 n 年																																		
.....																																		

	缴纳	利润	积存
第1年	2.5	0	$a_1 = 2.5$
第2年	2.5	2.5×0.035	$a_2 = 2.5 + 2.5 \times 0.035 + 2.5$
第3年	2.5	2.575×0.035	$a_3 = 2.5875 + 2.5875 \times 0.035 + 2.5 \approx 5.18$
第4年	2.5	5.18×0.035	$a_4 = 5.18 + 5.18 \times 0.035 + 2.5 \approx 7.86$
...			
第n年			
...			

【老师点评】

- 暴露该学生的前面几个空的计算过程，点明将上一年积存的计算结果作为当年利润计算的本金，并以此推导当年的积存。
- 该表格未能完成一般情况的推导，指出问题所在：只重视结果，未重视过程，使得规律难以显现。
- 给出完整准确表格，给予结论：
递推关系 $a_n = 1.035a_{n-1} + 2.5 (n \geq 2)$

	缴纳	利润	积存
第1年	2.5	0	$a_1 = 2.5$
第2年	2.5	$a_1 \times 0.035$	$a_2 = a_1 + a_1 \times 0.035 + 2.5$ $= a_1 \times 1.035 + 2.5$
第3年	2.5	$a_2 \times 0.035$	$a_3 = a_2 + a_2 \times 0.035 + 2.5$ $= a_2 \times 1.035 + 2.5$
第4年	2.5	$a_3 \times 0.035$	$a_4 = a_3 + a_3 \times 0.035 + 2.5$ $= a_3 \times 1.035 + 2.5$
.....
第n年	2.5	$a_{n-1} \times 0.035$	$a_n = a_{n-1} + a_{n-1} \times 0.035 + 2.5$ $= a_{n-1} \times 1.035 + 2.5$
.....

任务二、由递推关系推导 a_n 的通项公式

【老师讲解】

迭代法

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 2.5 \\
 a_2 &= a_1 \times 1.035 + 2.5 = 2.5 \times 1.035 + 2.5 \\
 a_3 &= a_2 \times 1.035 + 2.5 = (2.5 \times 1.035 + 2.5) \times 1.035 + 2.5 \\
 &= 2.5 \times 1.035^2 + 2.5 \times 1.035 + 2.5 \\
 a_4 &= a_3 \times 1.035 + 2.5 = (2.5 \times 1.035^2 + 2.5 \times 1.035 + 2.5) \times 1.035 + 2.5 \\
 &= 2.5 \times 1.035^3 + 2.5 \times 1.035^2 + 2.5 \times 1.035 + 2.5 \\
 &\dots \\
 a_n &= a_{n-1} \times 1.035 + 2.5 = 2.5 \times 1.035^{n-1} + 2.5 \times 1.035^{n-2} + \dots + 2.5 \times 1.035 + 2.5 \\
 &= \frac{2.5(1 - 1.035^n)}{1 - 1.035} = \frac{500}{7} \cdot 1.035^n - \frac{500}{7}
 \end{aligned}$$

待定系数法

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 2.5, \quad a_n = 1.035a_{n-1} + 2.5 \\
 \text{设 } \lambda, \text{ 使得 } a_n + \lambda &= 1.035(a_{n-1} + \lambda) (n \geq 2) \\
 \text{即 } a_n &= 1.035a_{n-1} + 0.035\lambda, \quad \square \text{ 与 } a_n = 1.035a_{n-1} + 2.5 \text{ 等价,} \\
 \text{故 } 0.035\lambda &= 2.5, \text{ 即 } \lambda = \frac{2.5}{0.035} = \frac{500}{7} \\
 \text{故 } \{a_n + \frac{500}{7}\} &\text{ 为等比数列, 首项 } 2.5 + \frac{500}{7}, \text{ 公比 } 1.035, \text{ 通项公式为} \\
 a_n + \frac{500}{7} &= (2.5 + \frac{500}{7}) \cdot 1.035^{n-1}, \text{ 整理得 } a_n = \frac{500}{7} \cdot 1.035^n - \frac{500}{7}
 \end{aligned}$$

由以上研究可得：

- a_n 与 a_{n-1} 的递推关系： $a_n = 1.035a_{n-1} + 2.5 (n \geq 2)$
- a_n 通项公式为 $a_n = \frac{500}{7} \cdot 1.035^n - \frac{500}{7}$

分缴纳和享用两个阶段研究，研究过程从“学生尝试，老师指导”发展到“学生独立完成，老师评价”，坚持以学生为主体，以任务为驱动，让学生积极参与建模的关键步骤。

- 缴纳阶段，积存 30 年的养老金总数额为 $a_{30} =$

$$\frac{500}{7} \cdot 1.035^{30} - \frac{500}{7} \approx 129.06 \text{ 万元}$$

2. 享用阶段

如果用 b_n 表示享用养老金后的第 n 年剩余的养老金数额，如何计算 b_n 呢？

任务三：寻求 b_n 与 b_{n-1} 的递推关系

【学生活动】填写下表，尝试寻求 b_n 与 b_{n-1} 的关系

	提取	利润	结余
第 1 年			
第 2 年			
第 3 年			
第 4 年			
...			
第 n 年			
...			

【学生展示 1】

	提取	利润	结余
第 1 年	8	0	$b_1 = 129.06 - 8 = 121.06$
第 2 年	8	0	$b_2 = 121.06 \times 1.035 - 8 = 113.06$
第 3 年	8	0	$b_3 = 113.06 \times 1.035 - 8 = 105.06$
第 4 年	8	0	$b_4 = 105.06 \times 1.035 - 8 = 97.06$
...			
第 n 年	8	0	$b_n = b_{n-1} - 8$

没缴纳养老金 ≠ 没利润

【学生展示 2】

	提取	利润	结余
第 1 年	8	129.06×0.035	$b_1 = 129.06 \times 1.035 - 8 = 125.5771$
第 2 年	8	$b_1 \times 0.035$	$b_2 = b_1 \times 1.035 - 8 = 119.95 - 8$
第 3 年	8	$b_2 \times 0.035$	$b_3 = b_2 \times 1.035 - 8 = 114.33 - 8$
第 4 年	8	$b_3 \times 0.035$	$b_4 = b_3 \times 1.035 - 8 = 108.71 - 8$
...			
第 n 年	8	$b_{n-1} \times 0.035$	$b_n = b_{n-1} \times 1.035 - 8$

【老师点评】

- 没缴纳养老金 ≠ 没利润
- 借助缴纳阶段递推关系的推导过程，不难推出 $b_n = 1.035b_{n-1} - 8 (n \geq 2)$

任务四：由 b_n 与 b_{n-1} 的递推关系推导 b_n 的通项公式

【学生展示 3】

$$\begin{aligned} b_1 &= 129.06 \times 1.035 - 8 = 125.5771 \\ b_2 &= 1.035b_1 - 8 \\ b_3 &= 1.035b_2 - 8 = 1.035^2b_1 - 8 \times 1.035 - 8 \\ b_4 &= 1.035b_3 - 8 = 1.035^3b_1 - 8 \times 1.035^2 - 8 \times 1.035 - 8 \\ &\dots \\ b_n &= 1.035^{n-1}b_1 - 8 \times (1.035^{n-2} + 1.035^{n-3} + \dots + 1.035 + 1) = 1.035^{n-1}b_1 - 8 \left(\frac{1-1.035^n}{1-1.035} \right) \end{aligned}$$

将 $b_1 = 125.5771$ 代入 $b_n = 1.035^{n-1} \times 125.5771 - \frac{8 \times (1.035^n - 1)}{0.035}$

【学生展示 4】

设 λ 使 $b_n + \lambda = 1.035(b_{n-1} + \lambda)$

$$\begin{aligned} b_n &= 1.035b_{n-1} + 0.035\lambda & b_n &= b_{n-1} + 1.035 - 8 \text{ 等价} \therefore 0.035\lambda = 8 \\ \therefore \lambda &= \frac{8}{0.035} = \frac{1600}{7} \end{aligned}$$

则 $(b_n + \frac{1600}{7})$ 成等比数列，首项 $b_1 + \frac{1600}{7}$ ，公比 1.035 。

$$\therefore b_n + \frac{1600}{7} = (b_1 + \frac{1600}{7}) \cdot 1.035^{n-1} \quad \text{即 } b_n = (b_1 + \frac{1600}{7}) \cdot 1.035^{n-1} - \frac{1600}{7}$$

代入整理得： $b_n = (125.5771 + \frac{1600}{7}) \cdot 1.035^{n-1} - \frac{1600}{7} \approx 99.51 \times 1.035^{n-1} + 228.57$

【老师点评】

- 与缴纳过程由递推关系求通项的方法一样，两位同学基本掌握了迭代法和待定系数法。

由以上研究可得：

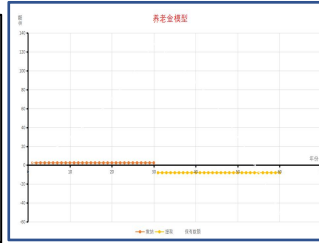
- b_n 与 b_{n-1} 的递推关系： $b_n = 1.035b_{n-1} - 8 (n \geq 2)$
- 通项公式为 $b_n \approx 228.57 - 99.51 \times 1.035^n$

【学生活动】 excel 操作实践

综合两个阶段，应用 excel 操作，完成如下表格，并将上述表格转化出散点图，连接散点形成曲线。

整合呈现
问题求解
(4分钟)

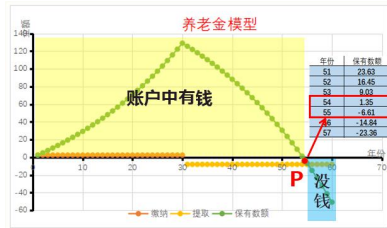
年份	缴纳	提取	保有金额	年份	缴纳	提取	保有金额
1	2.5			31		-8	
2	2.5			32		-8	
3	2.5			33		-8	
4	2.5			34		-8	
5	2.5			35		-8	
6	2.5			36		-8	
7	2.5			37		-8	
8	2.5			38		-8	
9	2.5			39		-8	
10	2.5			40		-8	
11	2.5			41		-8	
12	2.5			42		-8	



【老师展示】

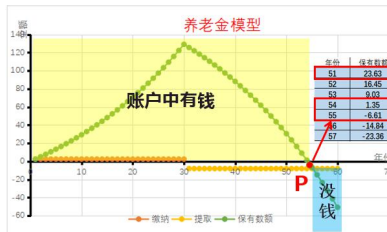
老师展示 excel 操作实践过程，并提出以下三个问题：

1. 如何解读 excel 散点图中“保有数额”绿色曲线在横轴上方，下方及与横轴相交的情况？



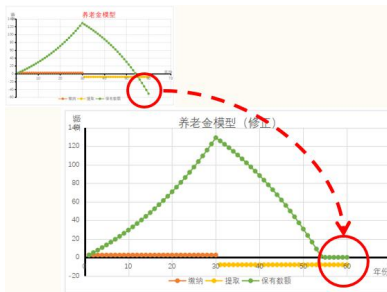
答：绿色曲线在横轴上方表示基金账户中还有钱，在横轴下方表示没退休时缴纳的养老金及其产生的利息已经取尽；与横轴相交的交点设为P，离P横坐标最近并比其大的整数，表示基金账户中的钱被取尽的年份。

2. 若从 25 岁工作起开始缴纳养老金，按我国平均寿命 76 岁计算，缴纳的养老金能否全部享用呢？



答：若25岁算起，到76岁时，为第51年，查表格可知：对应基金账户保有金额为23.63万元，即缴纳的养老金及其产生的利息还剩余23.63万元未能提取，可以理解为未能全部享用，若要全部享用要到第55年，即活到81岁。

3. 你觉得这个模型及数据还有没需要修正的地方？



答：由养老金政策可知，享用养老金的年限并不固定，以寿终为止，若基金账户保有的金额已取尽，但只要未寿终，公民仍可每年领取由国家给予的8万养老金，故第55年后的年份，基金账户保有金额应为0，修正后示图如右

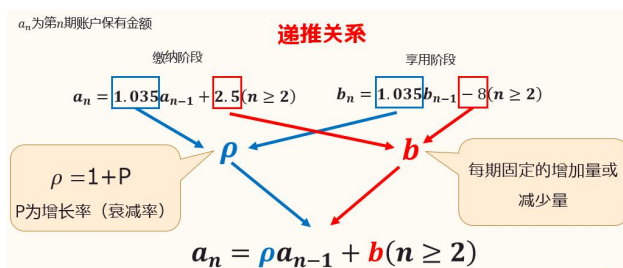
总结养老金问题的建模过程，我们可以得出一般化的类似养老金问题的数学模型吗？

【老师引导，学生归纳】

	缴纳阶段	享用阶段
递推关系	$a_n = 1.035a_{n-1} + 2.5 (n \geq 2)$	$b_n = 1.035b_{n-1} - 8 (n \geq 2)$
通项公式	$a_n = \frac{500}{7} \cdot 1.035^n - \frac{500}{7}$	$b_n = -99.51 \times 1.035^n + 228.57$

模型泛化
扩展应用
(2分钟)

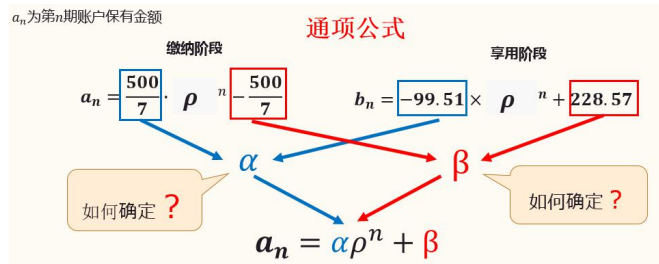
递推模型的归纳



设计 Excel 操作实践环节，让学生体验数据处理，绘制图表的过程；以问题驱动，让学生解读图表和数据，体验从数学模型再返回实践问题的过程。

通过总结提炼，归纳出类似养老金问题的递推模型和通项模型，扩展应用到更广的范围。

通项模型的归纳



α, β 的确定

$$a_n = \rho a_{n-1} + b (n \geq 2)$$

迭代法

待定系数法

$$a_n = \left(\frac{a_1 + \frac{b}{\rho-1}}{\rho} \right) \rho^n - \frac{b}{\rho-1}$$

α β

类似养老金问题的一般化数学模型

符号	意义
a_n	第 n 期账户保有金额
p	增长率 (衰减率)
ρ	$\rho = 1 + P$
b	每期固定的增加量或减少量

一般化模型	
递推关系	$a_n = \rho a_{n-1} + b (n \geq 2)$
通项公式	$a_n = \alpha \cdot \rho^n + \beta$ $\alpha = \frac{a_1 + \frac{b}{\rho-1}}{\rho}, \beta = -\frac{b}{\rho-1}$

适用于: 保险, 基金, 储蓄, 贷款等理财投资问题。

八、课后延伸

为买房, 你的父母正在筹划一笔房贷, 年息为 5.8%, 数额为 80 万元。请你组建一个月均还款额的数学模型, 并且计算如何还贷可以使得贷款在 30 年还清。如果他们每月可以有 5000 元的还款能力, 他们最多能够贷款多少?

参考文献

- [1] 史宁中. 数形结合与数学模型: 高中数学教学中的核心问题 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2018.
- [2] 刘福来. 高中数学建模 [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2019.