圆锥曲线在隧道横截面设计中的应用

一、教学内容

研究圆锥曲线在隧道横截面设计中的应用

二、教学目标:

通过高速公路上隧道的横截面曲线为实际情境，运用网络，计算工具，几何画板，展示工具等多媒体技术，经历从“曲线设计”的实际问题提炼出平面几何模型，最后转为曲线方程的确定及求解的建模全过程，从而巩固圆锥曲线方程应用的知识，掌握信息获取和筛选的技能，获得数形结合，转化与化归的数学思想，积累数学建模的经验，提升直观想象，数据分析，数学建模和数学运算的核心素养。

三、教学重难点:

1、**重点:** 初步了解数学建模流程，会用数学方法解决实际问题。

2、**难点:** 根据高速隧道模型的结构特征，构建适当的几何曲线，进而提炼曲线方程模型，反映实际问题。

四、教学方法: 任务驱动法、小组合作法。

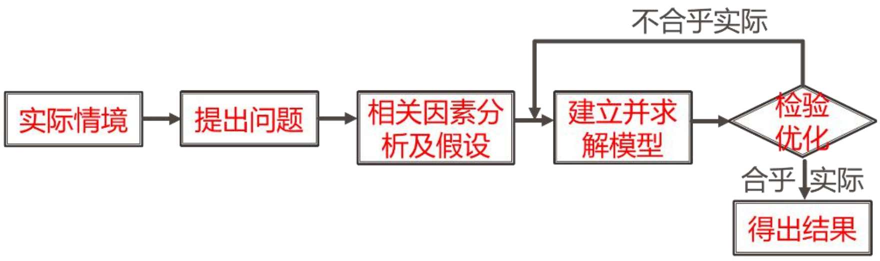
五、教学过程:

环节一、实际情境引入

1. **通过“生活中的隧道”话题引入实际情景，再通过**课本必修二 P146 页习题以及课本选修 2-1P74 页习题的“拱桥问题”引入圆锥曲线，从而确定研究主题：圆锥曲线在隧道横截面设计中的应用。

2. 如何将实际的隧道截面设计问题转化为圆锥曲线来研究？这是一个数学建模的过程。

提出数学建模的概念：数学建模是应用数学的知识与方法，通过建立数学模型去解决问题。并分析数学建模的流程步骤。



环节二、提出问题

如果我们要设计一份隧道横截面曲线的图纸，需要考虑哪些因素？需要收集哪些数据？隧道的横截面可以设计成什么形状？如何画出这个隧道的横截面曲线呢？

环节三、相关因素分析及假设

【模型假设】①双车道 ②只研究横截面

【分析对象】隧道与车辆

①隧道:

截面形状:“拱形”(小科普:为什么隧道不能是方形？)

“拱形”可以是我们学过的什么曲线？抛物线，圆，椭圆，双曲线

宽度：公路隧道的宽度由车道宽度、侧向宽度、余宽、人行道宽度组成。由表格数据，我们选定二级公路 60 公里的隧道，为了方便计算，我们可以适

表 4.4.1 两车道公路隧道建筑限界横断面组成及基本宽度（m）

公路等级	设计速度 (km/h)	车道宽度 W	侧向宽度		余宽 C	检修道宽度 J 或人行道宽度 R		建筑限界基本宽度
			左侧 L_L	右侧 L_R		左侧	右侧	
高速公路 一级公路	120	3.75×2	0.75	1.25	0.50	1.00	1.00	11.50
	100	3.75×2	0.75	1.00	0.25	0.75	0.75	10.75
	80	3.75×2	0.50	0.75	0.25	0.75	0.75	10.25
	60	3.50×2	0.50	0.75	0.25	0.75	0.75	9.75
	80	3.75×2	0.75	0.75	0.25	1.00	1.00	11.00
							1.00	10.00
							0.75	9.00
							0.75	8.50
								7.50

宜小于 3.5m。

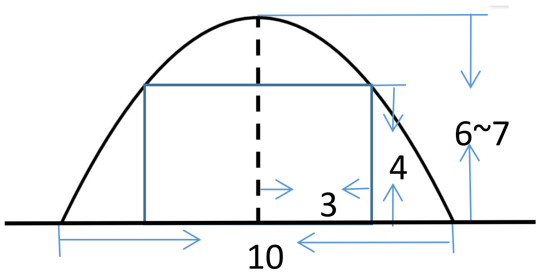
尺寸 项目 / 车型	外廓尺寸(m)		
	总长	总宽	总高
微型车	3.50	1.60	1.80
小型车	4.80	1.80	2.00
轻型车	7.00	2.10	2.60
中型车	9.00	2.50	3.20(4.00)
大型客车	12.00	2.50	3.20
铰接客车	18.00	2.50	3.20
大型货车	10.00	2.50	4.00
铰接货车	16.50	2.50	4.00

当假定车道宽为 3×2 米，总宽 10 米。
高度：指地面到拱顶的距离，一般为 6-7 米

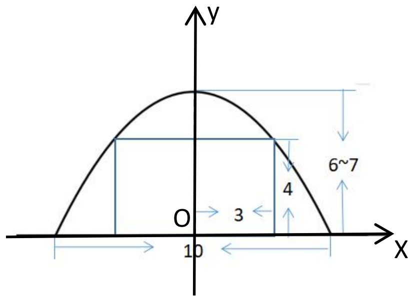
②车辆：需收集不同类型车辆的尺寸数据

由此表格数据，我们如何确定隧道中，如何设定能通过的车辆的宽度和高度？
W=2.50 米，H=4.00 米

环节四、模型建设



【构建几何模型】
明确条件：隧道形状“拱形”，车道宽度 3×2 米，总宽 10 米。
车辆宽度 2.5 米，高度 4 米。
学生活动：根据前面的假设和数据分析，分小组讨论，动手画一下隧道横截面的几何模型，并标出对应的数据。
老师指导：老师选择若干模型，应用高拍仪进行展示。



【提炼曲线方程模型】
1.建系
提炼曲线方程，第一步是什么？建系。该如何建系？
提问学生，讨论不同的建系方式。
确定：隧道横截面底边为 x 轴，底边中点为原点，过底边中点作垂线为 y 轴
2.曲线方程模型的确定
隧道形状为“拱形”，即可为抛物线，圆，椭圆，双曲线的局部，那我们可以将曲线的方程设成几种形式？
抛物线：需要设成$y=ax^2+bx+c$的形式吗？
不需要，因为该抛物线关于 y 轴对称可以设成：
①圆锥曲线形式：$x^2=-2p(y+b)$
②二次函数形式：$y=ax^2+c$
那么圆、椭圆、双曲线呢？需要设 3 个方程吗？
观察：$x^2+y^2=r^2$，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，它们之间有没有一般性？

我们可以将上述 3 个公式统一为$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1(m\neq 0,n\neq 0)$
这个是曲线的标准形式，我们是否需要对它进行平移，该如何平移？
我们需要上下平移，得到方程：$\frac{x^2}{m}+\frac{(y+b)^2}{n}=1(m\neq 0,n\neq 0)$
我们可以把隧道的横截面曲线归纳成两个方程模型：

①$y=ax^2+c$ ；②$\frac{x^2}{m}+\frac{(y+b)^2}{n}=1(m\neq 0,n\neq 0)$

3.结合建系后的曲线及相关条件，求解方程
学生活动：分小组，可用计算器，求解两个模型。

模型 1：$y=ax^2+c$，过（3,4）（5,0），求解曲线方程

解：将（3,4）（5,0）代入$y=ax^2+c$，则有$\begin{cases}4=9a+c\\0=25a+c\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=-\dfrac{1}{4}\\c=\dfrac{25}{4}\end{cases}$　所以$y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{25}{4}$　（y⩾0）

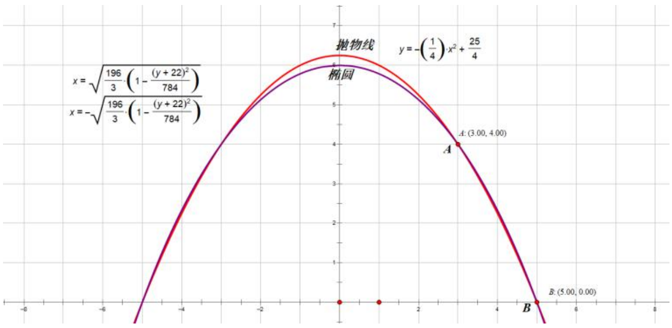
模型 2：$\dfrac{x^2}{m}+\dfrac{(y+b)^2}{n}=1(m\neq0,n\neq0)$，过（3,4）（5,0）（0,6），求解方程

解：将（3,4）（5,0）（0,6）代入$\dfrac{x^2}{m}+\dfrac{(y+b)^2}{n}=1(m\neq0,n\neq0)$，则有

$\begin{cases}\dfrac{9}{m}+\dfrac{(4+b)^2}{m}=1\\\dfrac{25}{m}+\dfrac{b^2}{m}=1\\\dfrac{(6+b)^2}{m}=1\end{cases}$　解得$\begin{cases}m=\dfrac{196}{3}\\n=784\\b=22\end{cases}$　所以$\dfrac{3x^2}{196}+\dfrac{(y+22)^2}{784}=1$（y⩾0）

环节五、检验优化

把两个曲线 $y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{25}{4}$，$\frac{3x^2}{196}+\frac{(y+22)^2}{784}=1$ 的图像用几何画板画出来，如图：



通过图像对比，如果从最节省材料的角度，你能判断哪个模型更优？

当然我们也可以从美观、力学、工程量等因素去考虑。

环节六、分组实践展示（课后）

同学进行小组合作，参考刚才老师的例子，完成三车道隧道横截面曲线模型的设计，并求出曲线方程。

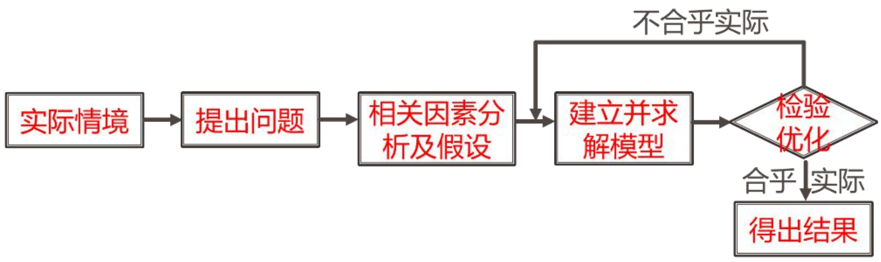
学生小组合作分工，每个小组有一个小组长负责统筹，2~3 个组员负责计算，1~2 个组员负责记录，完成一个“隧道横截面的曲线设计的数学建模成果汇报表”

课题组成员	
成员姓名	分工与主要工作或贡献
建模过程和结果（原始问题，基本数据，模型假设）	

建模过程和结果（建模过程，解算和结果）
建模过程和结果（分析和说明）
体会（描述在工作中的感受和收获）

小组长派一名组员上台展示该小组的成果,用投影高拍仪把小组的成果表格展示在投影上，分享交流。通过几何画板，把两到三个曲线通过几何画板画出来，作出对比。可以通过目测法，对曲线的周长或者面积进行对比。结合学生所述，教师给予指导

环节七、总结提升



数学建模是应用数学的知识与方法，通过建立数学模型去解决问题。本节课通过一个简单的隧道横截面设计问题，从生活中的隧道这个实际情景出发，提出隧道横截面曲线的设计问题，通过对隧道和车辆进行假设和数据分析，先得到一个几何模型，再通过建系设点，得到两个曲线方程模型，求解两个模型后，再从用料最省的角度，对比图象，得到最优模型。